## **תרגול 12: מיון חבורות אבליות**

**שאלה:** מתי מכפלה (פנימית) של שתי תת-חבורות איזומורפית למכפלה (החיצונית) הישרה שלהן?

כלומר $H,K \le G$ , מתי מתקיים $HK \cong H \times K$ ?

שימו לב:

א. זכרו שבהרבה מקרים $HK$ היא בכלל לא ת"ח, ואז השאלה לא רלוונטית.

ב. $H \times K$ אינה ת"ח של G! (במקרה הטוב היא איזומורפית לתת-חבורה שלה).

ג. במיוחד מענין המקרה בו $HK = G \cong H \times K$ כי אז אנחנו מקבלים "פירוק" של החבורה.

**דוגמאות:**

1. נסתכל על $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ אזי אם ניקח $H =< (1,0) >, K =< (0,1) >$ אזי $HK = G \cong H \times K$ . את השיווין השמאלי בדקו אתם, האיזומורפיזם מימין נובע כיוון ש $H,K$ חבורות מסדר 2, ולכן איזומורפיות ל $\mathbb{Z}_2$ . במקרה זה שמים לב ש H,K הן תח"נ (כי החבורה G היא אבלית).

2. נסתכל על $G = S_3$ אז ניקח $H =< (1,2) >, K =< (1,2,3) >$ , ואז $HK = G$ כיוון ש $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6 = |G|$ ( $|H \cap K| = 1$ בגלל ש $H \cap K \le H, H \cap K \le K$ ולפי לגרנג' נקבל $|H \cap K| \mid 2, |H \cap K| \mid 3 \Rightarrow |H \cap K| = 1$ ). ניתן היה גם לבדוק ש $HK \le G$ לפי זה ש K היא תח"נ של G, אבל זה מיותר. אבל $HK = G \ncong H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ כי החבורה מימין היא אבלית. נשים לב שבדוגמא זאת K היא תח"נ, אבל H אינה תח"נ.

3. נסתכל על $G = \mathbb{Z}_6$ אז ניקח $H =< 2 >= 2\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3, K =< 3 >= 3\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2$ , נשים לב שכיוון ש G היא חבורה חיבורית, נרשום $H + K$ במקום $HK$ . אזי קל לבדוק ש $H + K = G$ (ידנית או בעזרת שיקולי הסדר מהדוגמא הקודמת). כעת $H + K = G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ כיוון ש $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ היא חבורה ציקלית מסדר 6, עם היוצר (1,1). שוב במקרה זה אנחנו רואים ש H,K תח"נ.

רואים בדוגמאות שיש קשר בין הנורמליות של שתי הת"ח H,K לבין האיזומורפיות של מכפלתן ל $H \times K$ . לכן נגדיר:

**! הגדרה:** תהא $G$ חבורה ו $H_1, H_2 \lhd G$ כך ש:

1. $H_1 \bigcap H_2 = e$
2. $H_1 H_2 = G$

אז $G$ נקראת **מכפלה פנימית ישרה** של $H_1, H_2$.

**משפט ("מכפלה חיצונית מכפלה פנימית"):** תהי $G$ חבורה ויהיו $A, B \leq G$. אם G מכפלה פנימית ישרה של A ו B אזי היא מכפלה חיצונית ישרה של A ו B, או יותר במדויק $G \cong A \times B$.

**הערה:** ההפך של המשפט אינו מדויק, לדוגמא אם ניקח $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ וניקח $A = B =< (1,0) >$ אזי $G \cong A \times B$ אבל $AB = A \neq G$. אבל ניתן לומר:

**משפט:** אם G היא מכפלה (חיצונית) ישרה של תת-חבורות H,K אזי קיימות $A, B \leq G$ כך ש G היא מכפלה פנימית ישרה של A,B, כך ש $A \cong H, B \cong K$.

**הערה:** בזכות שני המשפטים האחרונים אנחנו רואים שאין הבדל עקרוני בין "מכפלה חיצונית ישרה" לבין "מכפלה פנימית ישרה" ולכן כאשר אומרים מכפלה ישרה ניתן להתייחס אליה גם כפנימית וגם כחיצונית.

**! משפט**: תהי $G$ חבורה אבלית סופית מסדר $\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$ כאשר $p_i$ ראשוניים שונים אז $G \cong H_{p_1} \times H_{p_2} \times \ldots \times H_{p_k}$ כאשר $H_{p_i}$ תת חבורה $p_i$ סילוא. בוודאי שפירוק זה הוא יחיד עד כדי סדר הגורמים, ואם דורשים בפירוק ש $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ אזי הוא יחיד.

**שימו לב:** החבורות $H_{p_i}$ אינן בהכרח ציקליות. לדוגמא עבור $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ יש רק חבורת סילוא אחת בפירוק, והיא $H_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

**מסקנה:** כל חבורה אבלית סופית איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות $p$.

**משפט:** כל חבורת-$p$ אבלית איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות-p ציקליות. גם כאן הפירוק יחיד עד כדי סדר הגורמים.

**! המשפט היסודי לחבורות אבליות סופיות:** כל חבורה אבלית סופית איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות-p ציקליות. הפירוק יחיד עד כדי סדר הגורמים.

**הוכחה:** המשפט נובע ישירות משני המשפטים הקודמים. "האלגוריתם" כזה: קודם "מפרקים" כל חבורה אבלית למכפלה של חבורות-p, ואז "מפרקים" כל חבורת-p בפירוק הנ"ל למכפלה של חבורות-p ציקליות.

**הערה:** שימו לב: אם לא דורשים שהפירוק הוא לחבורות-p ציקליות, אז הפירוק אינו יחיד (אפילו לא עד כדי סדר הגורמים)!!! לדוגמא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ הם שני פירוקים **שונים** של אותה חבורה לחבורות ציקליות. למעשה לכל חבורה ציקלית יש אינסוף פירוקים לחבורות ציקליות:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n \times \{e\} = \mathbb{Z}_n \times \{e\} \times \{e\} = \ldots$$

**תרגיל:** מיינו את כל החבורות <u>האבליות</u> מסדר $50$ .

**הוכחה:** $50 = 2 * 5^2$ . לכן לפי המשפט היסודי של חבורות אבליות לכן $G = H_5 \times H_2$. עכשיו ידוע שכל חבורת $p$ איזומורפיות למכפלה ישרה של חבורות ציקליות במקרה הנ"ל $H_5, H_2$ חבורות $p$ לכן הם איזומורפיות למכפלה ישרה של חבורות ציקליות והאפשריות הם:

$$H_5 \cong \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$
$$H_2 \cong \mathbb{Z}_2$$

לכן סך הכל נקבל:

$$G \cong \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_2 \quad \vee \quad G \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

**תרגיל:** מיינו את החבורות האבליות מסדר $40$.

**תשובה:** $40 = 2^3 * 5$ לפי המשפט היסודי של חבורות אבליות ניתן לפרק למכפלה של חברות ציקליות.לפי משפט על פירוק לחבורות $p$ סילוא נקבל

$G \cong H_2 \times H_5$ וכל חבורה היא חבורת- $p$ אשר איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות ציקליות.

$$H_5 \cong \mathbb{Z}_5$$
$$|H_2| = 8 \Rightarrow H_2 \cong \mathbb{Z}_8 \vee \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \vee \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

ולכן סך הכל האפשריות הם:

$$G \cong \mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8 \vee \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \vee \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

**שימו לב:** בשתי הדוגמאות האחרונות רשמנו את כל האפשרויות עבור חבורות אבליות מסדר 50, 40, אך לא הראינו שכל שתי אפשרויות אינן איזומורפיות זו לזו. לדוגמא, כיצד נוכיח ש $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \ncong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . ניתן כמובן לרשום את טבלאות הכפל של החבורות, ולבדוק סדרי איברים וכו, אבל אנחנו רוצים דרך יותר פשוטה להראות ששתי תת-חבורות אינן איזומורפיות.

**<u>הגדרה:</u>** תהי $G$ חבורה. **המעריך** (**אקספוננט**) של $G$ מוגדר כ:

$$\exp(G) = lcm\{|g| \mid g \in G\}$$

**<u>דוגמאות:</u>**

$$\exp(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = lcm\{1,2\} = 2 \neq \exp(\mathbb{Z}_4) = lcm\{1,2,4\} = 4$$

$$\exp(S_3) = \exp(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) = \exp(\mathbb{Z}_6) = lcm\{1,2,3\} = 6$$

**<u>שימו לב:</u>** בשיעור ייתכן וראיתם הגדרה אחרת של המעריך (נסמנה בשם expmax במקום exp כדי למנוע בלבול) והיא:

$$\exp\max(G) = \max\{|g| \mid g \in G\}$$

הגדרה זאת אינה סטנדרטית, והיא מספיק טובה כאשר עובדים רק עם חבורות אבליות.

**<u>תרגיל בית:</u>**

א. הראו שאם A חבורה אבלית אזי $\exp(A) = \exp\max(A)$.

ב. הביאו חבורה G שאינה אבלית עבורה $\exp(A) \neq \exp\max(A)$.

**<u>תרגיל בית:</u>** exp(G) הוא המספר הכי קטן עבורו מתקיים $g^n = e$ לכל $g \in G$.

**<u>מסקנה:</u>** $\exp(G) \leq |G|$, כיוון ש $g^{|G|} = e$ לכל $g \in G$. למעשה מתקיים $\exp(G) \mid |G|$ כיוון ש $|G|$ היא כפולה משותפת של אברי G (מדוע?), וראינו בתחילת הקורס שכפולה משותפת מינימלית מחלקת כל כפולה משותפת.

**<u>תרגיל בית:</u>** $\exp(G \times H) = lcm(\exp(G), \exp(H))$. רמז: נובע מכך שעבור $(x,y) \in G \times H$ מתקיים $o((x,y)) = lcm(o(x), o(y))$.

**<u>דוגמא:</u>** לדוגמא ב $\exp(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = 2$ (כי כל האיברים הם מסדר 2), ובאמת לפי הטענה מקבלים $\exp(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = lcm(\exp(\mathbb{Z}_2), \exp(\mathbb{Z}_2)) = lcm(2,2) = 2$. בדוגמא זאת גם רואים שיכול להיות מצב בו $\exp(G) < |G|$.

**<u>תרגיל:</u>** אם G חבורה ציקלית אז $\exp(G) = |G|$.

**הוכחה:** אם $\exp(G)<|G|$ אז לכל $g\in G$ מתקיים $|g|\le\exp(G)<|G|$ בסתירה לכך שהחבורה ציקלית (בחבורה ציקלית תמיד קיים איבר מסדר החבורה).

**תרגיל:** הוכיחו או הפריכו: הכיוון השני של המשפט, כלומר אם $\exp(G)=|G|$ אזי G ציקלית.

**פתרון:** נפריך ע"י $S_3$: $\exp(S_3)=lcm(1,2,3)=6=|S_3|$.

**תרגיל:** אם G חבורת-p אזי G היא ציקלית אם ורק אם $\exp(G)=|G|$.

**פתרון:** כיוון <= הוא מקרה פרטי של התרגיל הלפני אחרון. =>: לפי הגדרה $\exp(G)=lcm\{o(g)\mid g\in G\}$.
לפי משפט לגרנג' בחבורת-p מתקיים שלכל $g\in G$ קיים $i_g$ כך ש $o(g)=p^{i_g}$. לכן
$\exp(G)=lcm\{p^{i_g}\mid g\in G\}=\max\{p^{i_g}\mid g\in G\}$ כלומר קיים איבר $g\in G$ כך ש $\exp(G)=o(g)$ ומכאן נובעת הטענה.

**תרגיל:** אם G חבורה לא אבלית מסדר 8 אזי $\exp(G)=4$.

**פתרון:** $\exp(G)\mid |G|\Rightarrow\exp(G)\mid 8\Rightarrow\exp(G)\in\{1,2,4,8\}$.

נפסול את כל המקרים פרט ל 4:

א. $\exp(G)\ne 1$ כיוון שקיים איבר ב G מסדר 2 לפי משפט קושי, ולכן $\exp(G)\ge 2$.

ב. $\exp(G)\ne 8$ כי אחרת החבורה היא ציקלית, לפי טענה שראינו קודם (כי החבורה היא חבורת-2), ואז אבלית, בסתירה להנחה.

ג. $\exp(G)\ne 2$ כי אחרת כל האיברים שהם לא היחידה הם מסדר 2, וראינו בתחילת הקורס שחבורה בה כל האיברים הם מסדר 2 היא אבלית.

**משפט "המעריך":** אם $G\cong H$ אז $\exp(G)=\exp(H)$.

**תרגיל:** הראו ש $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\ncong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$.

**פתרון:** המעריך של החבורה מימין הוא 10, המעריך של החבורה משמאל הוא 20. ולכן החבורות אינן איזומורפיות.

**משפט הצמצום:** אם $G\times H\cong K\times H$ אזי $G\cong K$ (בצורה דומה ניתן לצמצם משמאל).

**תרגיל:** הראו ש $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\ncong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

**פתרון:** שימו לב שבמקרה זה המעריכים שני המעריכים שווים ל 4. דוגמא זו מראה שמשפט "המעריך" לא נכון בכיוון ההפוך. אפשר לפתור את התרגיל בעזרת הדרגה של החבורות, או מספר איברים מסדר 2, אבל אפשר לפתור יותר בקלות בעזרת משפט הצמצום: נניח בשלילה ש $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ ונצמצם $\mathbb{Z}_4$ משמאל, ונקבל $\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ , סתירה (החבורה משמאל היא ציקלית, ומימין היא לא, או החבורה משמאל היא עם מעריך 4, ומימין עם מעריך 2).

**תרגיל:** תהי G חבורה אבלית מסדר 72 עם 3 איברים מסדר 2 ופחות מ 8 איברים מסדר 3. מצאו את החבורה G.

**פתרון:** $G\cong H_2\times H_3$ מכפלה ישרה של חבורת 2-סילוא וחבורת 3-סילוא מסדרים $3^2,2^3$ בהתאמה.

האפשרויות עבור $H_2$ הן:

$$H_2\cong\mathbb{Z}_8,\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

האפשרויות עבור $H_3$ הן:

$$H_3\cong\mathbb{Z}_9,\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$$

כעת נתחיל לפסול אפשרויות עבור $H_2$ :

א. $H_2\ncong\mathbb{Z}_8$ כיוון שב $\mathbb{Z}_8$ יש רק איבר אחד מסדר 2. מדוע? נזכר שסדר של איבר $g\neq 0$ ב $\mathbb{Z}_n$ הוא $o(g)=\dfrac{n}{lcm(n,g)}$ . לכן $2=o(g)=\dfrac{8}{lcm(8,g)}\Rightarrow lcm(8,g)=4\Rightarrow g=4$ .

ב. $H_2\ncong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ כי מספר האיברים מסדר 2 ב $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ הוא 7 (כל האיברים פרט ליחידה הם מסדר 2).

ניתן לראות שב $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ יש 3 איברים מסדר 2 (הם $(2,0),(2,1),(0,1)$), לכן קיבלנו שבהכרח $H_2\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ .

בצורה דומה עבור $H_3$ ניתן לפסול את $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ כיוון שיש בה 8 איברים מסדר 3, וב $\mathbb{Z}_9$ יש 2 איברים מסדר 3 (והם 3,6). לכן בהכרח $H_3\cong\mathbb{Z}_9$ .

לכן בסה"כ קיבלנו שבהכרח $G\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{36}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{18}$ .