

גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית, 88-201, תשע"ג, סימסטר ב'.

תרגיל 1- וקטורים ב- \mathbb{R}^3 ו- סימוני הסכימה של איינשטיין.

וקטורים ב- \mathbb{R}^3 :

1. הוכיחו את זהות לאגרנז': $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$.

2. יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$

ב. $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$

3. יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ ווקטורים אורתונורמליים, הראה ש:

א. הווקטורים $u, v, u \times v$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב- \mathbb{R}^3 .

ב. $(u \times v) \times v = -u, (u \times v) \times u = v$ והסבר את המשמעות הגיאומטרית.

4. יהיו l_1 ו- l_2 שני ישרים במרחב \mathbb{R}^3 שאינם מקבילים. v_1 ווקטור שכיוונו ככיוון הישר l_1 ו- v_2 ווקטור שכיוונו ככיוון הישר l_2 . a_1 נקודה שנמצאת על הישר l_1 ו- a_2 נקודה שנמצאת על הישר l_2 .

הראה שהמרחק d בין שני הישרים מתקבל ע"י הנוסחה: $d = \left| \langle a_1 - a_2, \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} \rangle \right|$

תזכורת: מרחק בין שני ישרים מצטלבים במרחב מוגדר להיות המרחק בין הישר הראשון למישור שמכיל את הישר השני ומקביל לישר הראשון.

סימוני הסכימה של איינשטיין:

5. כתוב בצורה מלאה את הסכום הנתון בסימון איינשטיין: $(i, j = 1, 2, 3)$

א. $a_j^i b_k^j c_s^k$

ב. $a_{ij} v^i v^j$

ג. $\delta_{ij} a^{ij}$

6. תהינה A, B מטריצות ריבועיות. הוכח, בעזרת סימוני הסכימה של איינשטיין, ש-

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

7. הוכח שפעולת כפל מטריצות הינה דסטרביוטיבית (השתמש בסכימת איינשטיין)

8. תהיי δ_j^i פונקצית דלתא של קרונקר $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ הערך את הביטוי $\delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k$ (הנתון בסימוני איינשטיין).