מערך תרגיל קורס 89-133 סמסטר ב' תשע"ה
בחשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

מרץ 2015, גרסה 0.1

מבוא

נתחיל עם כמה דגשים:

- דף הקורס נמצא באתר www.math-wiki.com.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- נכון לעכשיו יש הגשת תרגילים, עם בדיקה חלקית.
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

1 אינטגרל מסוים

1.1 אינטגאל לפי רימן

הגדרה 1.1. יהי $[a,b]$ קטע סגור. נקרא ל-$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע $[a,b]$. נסמן $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ לכל $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

הגדרה 1.2. תהא f פונקציה מוגדרת בקטע $[a,b]$ ותהא $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע. בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ נבחר נקודה α_i ונבנה את סכום רימן עבור החלוקה T, הפונקציה f והנקודות $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ לפי

$$\sigma_T(\alpha_1,\ldots a_n):=\sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\Delta x_i$$

הגדרה 1.3. פרמטר החלוקה של T מוגדר להיות $\lambda(T) = \max(\Delta x_i)$. נאמר כי סדרה של חלוקות $\{T_n\}$ היא נורמלית אם $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$.

הגדרה 1.4. נאמר שקיים הגבול $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ המקיימת: לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta$ ולכל בחירה של $\{\alpha_i\}$ מתקיים $|\sigma_T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| < \epsilon$.

נהוג לסמן גבול זה $\int_a^b f(x)dx$. הוא נקרא האינטגראל (המסוים) של רימן. במקרה זה נאמר כי f אינטגרבלית רימן בקטע $[a,b]$.

משפט 1.5. פונקציה רציפה או מומונטונית בקטע $[a,b]$ אינטגראבלית שם.

משפט 1.6. אם פונקציה f חסומה בקטע $[a,b]$ ויש לה שם קבוצה סופית (או ליתר דיוק בת מניה) של נקודות אי רציפות, אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
(להדגיש כי תנאי הכרחי לאינטגראביליות רימן היא חסימות הפונקציה.)

משפט 1.7. אם F פונקציה קדומה של פונקציה רציפה f בקטע $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

תרגיל 1.8. חשבו את האינטגרל $\int_0^5 (5-x)\, dx$

פתרון. דרך אחת היא בעזרת "משולש" בגרף הפונקציה. הדרך הכללית היא לחשב עם חלוקה נורמלית את

$$\int_0^5 (5-x)\, dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (5-\alpha_k)\, \Delta x_k$$

לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 5 - x$ אינטגרבילית בקטע $[0,5]$, מפני שהיא רציפה שם. אפשר לבחור כל סדרה של חלוקות $\{T_n\}$. בפרט, נבחר חלוקה שווה

$$\Delta x = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$$

עם נקודת קצה ימנית $\alpha_k = 0 + k \cdot \frac{5}{n} = \frac{5k}{n}$, ונחשב:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(5 - \frac{5k}{n}\right) \frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{25}{n} - \frac{25k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{25}{n} \cdot n - \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(25 - \frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$$

תרגיל 1.9. חשבו את האינטגרל $\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx$

פתרון. לפי המשפט הנ"ל, הפונקציה $f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$ אינטגרבילית בקטע $[0,3]$ כי היא רציפה שם. נבחר חלוקה שווה של $[0,3]$:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

עם נקודת קצה שמאלית $\alpha_k = 0 + (k-1)\cdot\frac{3}{n} = \frac{3(k-1)}{n}$, ונחשב:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(4 - \frac{1}{4}\left(\frac{3(k-1)}{n}\right)^2\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{12}{n} - \frac{27}{4n^3}(k-1)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12}{n}\cdot n - \frac{27}{4n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12}{n}\cdot n - \frac{27}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{54}{4n^3}\cdot\frac{n(n-1)}{2} - \frac{27}{4n^3}\cdot n\right) \\
&= 12 - \frac{27\cdot 2}{4\cdot 6} = 12 - \frac{9}{4} = \frac{39}{4}
\end{aligned}$$

הערה. נשים לב כי ניתן להוכיח באינדוקציה כי

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

דוגמה 1.10 (לדלג). הפונקציה $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + 2x\cdot\chi_{(1,2]}(x)$ רציפה למקוטעין ב $[0,2]$ ולכן

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 1\cdot dx + \int_1^2 2xdx \\
&= 1 + x^2|_1^2 = 1 + [2^2 - 1^2] = 4
\end{aligned}$$

תרגיל 1.11. הוכיחו כי פונקצית דריכלה בקטע $[0,1]$ המוגדרת לפי

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

אינה אינטגראבלית. (נעיר כי לפעמים הפונקציה מוגדרת הפוך, אך אין זה משנה לתרגיל זה.)

פתרון. $D(x)$ אינה אינטגראבלית כי עבור $\epsilon = 0.5$ לכל חלוקה T עם פרמטר חלוקה הקטן מ-0.5 נוכל לבחור את $\{\alpha_i\}$ להיות מספרים אי־רציונאליים ואז

$$\sigma_T(\alpha_1, \dots a_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = 1 - 0 = 1$$

ביתר פירוט: נבחר חלוקה שווה של הקטע $[0,1]$ וברור כי $\Delta x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. בבחירה $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ תמיד אפשר לבחור נקודה רציונלית או נקודה אי־רציונלית, ולכן סכום רימן יכול לקבל כל ערך בין 0 ל-1. למשל אם נחבר רק נקודות רציונליות נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n} D(\alpha_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0$$

ולכן סכומי הרימן השונים במקרה זה לא מתכנסים לאותו הגבול.

תרגיל 1.12. קבע האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

פתרון. הפונקציה לא אינטגרבילית, כי $\lim_{n\to 0^+} f(x) = \infty$, כלומר כי $f(x)$ אינה חסומה ב-$[0,1]$.

תרגיל 1.13. קבע האם הפונקציה המוגדרת לפי

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[-1,1]$.

פתרון. הפונקציה כן אינטגרבילית, כי $|f(x)| \leq 1$ לכל $x \in [-1,1]$. כלומר $f(x)$ חסומה בקטע ויש לה נקודת אי רציפות אחת ב-$x = 0$.

תרגיל 1.14 (לדלג, ממבחן). הוכח כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$

פתרון. נשתמש בעובדה כי אם $f \leq g$ בקטע $[a,b]$ אז $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ (אם קיימים)

נמצא מיני' ומקס' של $f(x) = e^{x^2-x}$

$f'(x) = f(x)(2x-1)$ ולכן יש נקודה חשודה ב $x = 0.5$

$f''(x) = f(x)(2x-1)^2 + 2f(x)$ ולכן ב- 0.5 יש מינ' ($f''(0.5) > 0$)

$f(0.5) = e^{-0.25}$ ערך מיני'

בנוסף המקס' מתקבל באחת מהקצוות $\max\{f(0), f(2)\} = f(2) = e^2$

ולכן $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} = \int_0^2 e^{-0.25}dx \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le \int_0^2 e^2 dx = 2e^2$

משפט 1.15 (משפט הערך הממוצע האינטגראלי)**.** יהיו $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ ו-$g(x)$ אינטגראבלית אי-שלילית שם. אזי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$

במקרה הפרטי שבו $g(x) = 1$ נקבל $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

הוכחה. אם $\int_a^b g(x)dx = 0$ אז השיוון טריוויאלי (כל נקודה c תקיים את השיוון). אחרת- נסמן $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ וגם $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ אזי מתקיים

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

ואז $M \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le m$. כיוון ש f רציפה, נקבל ממשפט ערך הביניים כי קיימת $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. $\square$

שאלה 1.16. הוכח כי $\frac{1}{2}\ln(2) \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx \le \frac{1}{2e}\ln(2)$.

פתרון. לפי משפט ערך הביניים קיימת $c \in [0,\pi/4]$

כך ש $\int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx = e^{-c^2}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx$

כיוון ש $e^{-1} \le e^{-\pi/4} \le e^{-c^2} \le e^0 = 1$

נקבל כי $e^{-1}\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan(x)dx \le \int_0^{\pi/4}\tan(x)dx$

נראה כי $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = \frac{1}{2}\ln(2)$

ראינו כי פונקציה קדומה של $\tan(x)$ היא $-\ln|\cos(x)|$ (ע"י הצבה $t = \cos(x)$)

ולכן $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = -\ln|\cos(\pi/4)| - (-\ln|\cos(0)|) = -\ln(2^{-0.5}) = 0.5\ln(2)$

קריטריון דארבו לאינטגראבליות

הגדרה 1.17. תהא f חסומה ב $[a,b]$ו $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה של הקטע.

נסמן $f(x)$ $M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}$, $f(x)$ $m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}$ ונגדיר את

$\bar{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ הסכום העליון של דרבו

$\underline{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ הסכום התחתון של דרבו

שימו לב כי סכום דרבו עליון והתחתון כבר לא תלויים בבחירת $\{\alpha_i\}$ כמו בסכום רימן.

משפט 1.18. מתקיים

$$\bar{S}(T)=\sup\{\sigma_T|\sigma_T \text{ is a Riemann sum}\}$$
$$\underline{S}(T)=\inf\{\sigma_T|\sigma_T \text{ is a Riemann sum}\}$$

משפט 1.19. עבור 2 חלוקות T_1,T_2 של הקטע מתקיים $\underline{S}(T_1)\le\bar{S}(T_2)$

הגדרה 1.20. תהא T חלוקה של הקטע $[a,b]$. T' חלוקה של $[a.b]$ תקרא העדנה של T אם היא מכילה את כל הנקודות של T.

משפט 1.21. מתקיים

$$\bar{S}(T)\ge\bar{S}(T')$$
$$\underline{S}(T)\le\underline{S}(T')$$

הגדרה 1.22. האינטגראל העליון של דארבו מוגדר להיות $\bar{I}:=\inf\limits_{T}\left\{\bar{S}(T)\right\}$.

האינטגראל התחתון של דארבו מוגדר להיות $\underline{I}:=\sup\limits_{T}\left\{\underline{S}(T)\right\}$.

משפט 1.23. תהא f חסומה בקטע $[a.b]$ אזי f אינטגראבילית רימן

$\Leftrightarrow$ $\bar{I}=\underline{I}$ (ואז הם שווים לערך $\int_a^b f(x)dx$)

$\Leftrightarrow$לכל $\epsilon>0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $|\bar{S}(T)-\underline{S}(T)|<\epsilon$

$\Leftrightarrow$לכל $\epsilon>0$ קיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\epsilon$ (כאשר $\omega_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}f$ - התנודה של f בקטע $[x_{i-1},x_i]$)

תרגיל 1.24 (ממבחן). תהא f פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,1]$, סדר את הבאים מהקטן לגדול:

$$f(0)$$
$$f(1)$$
$$\tfrac{1}{3}(f(0)+f(\tfrac{1}{3})+f(\tfrac{2}{3}))$$
$$\tfrac{1}{3}(f(\tfrac{1}{3})+f(\tfrac{2}{3})+f(1))$$
$$\tfrac{1}{300}\sum_{i=1}^{300}f(\tfrac{i-1}{300})$$

$\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$
$\int_0^1 f(x)dx$

פתרון. נגדיר 3 חלוקות $T : 0 < 1$, העידון שלה
$T' : 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ והעידון שלה
$T'' = 0 < \frac{1}{300} < \frac{2}{300} < \cdots < \frac{299}{300} < 1$ אזי מתקיים

$$\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T') \leq \underline{S}(T'') \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \bar{S}(T'') \leq \bar{S}(T') \leq \bar{S}(T)$$

וכיוון ש fמונוטונית מתקיים:
$\underline{S}(T) = f(0)$
$\bar{S}(T) = f(1)$
$\underline{S}(T') = \frac{1}{3}(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}))$
$\bar{S}(T') = \frac{1}{3}(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1))$
$\underline{S}(T'') = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i-1}{300})$
$\bar{S}(T'') = \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f(\frac{i}{300})$

טענה 1.25. $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q},\ \gcd(p,q) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ פונקצית רימן אינטגראבלית בקטע $[0,1]$.

יהא $\epsilon > 0$ נראה שקיימת חלוקה T של הקטע כך ש $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \epsilon$
חישוב:
יש מספר סופי של q ים המקיימים $\frac{1}{q} \geq \epsilon$.
עבור כל q כזה יש מספר סופי של שברים מצומצמים $\frac{p}{q} \in [0,1]$
ולכן יש מספר סופי של $x \in [0,1]$ המקיימים $R(x) \geq \epsilon$. נסמן מספר זה ב N
נעיר כי:
לכל חלוקה T , לכל תת קטע מתקיים $\sup_{[x_{i-1}.x_i]} f \leq 1$ $\inf_{[x_{i-1}.x_i]} f = 0,$
מסקנה
יש לכל היותר N תתי קטעים בהם $\sup_{[x_{i-1}.x_i]} f \geq \epsilon$
ולכן לכל היותר Nתתי קטעים בהם $1 \geq \omega_i \geq \epsilon$. נסמן את אוסף הקטעים האלה ב $E_{\geq\epsilon}$
את שאר הקטעים נסמן באוסף $E_{<\epsilon}$.

כעת נבחר חלוקה T עם פרמטר חלוקה $\lambda(T) < \delta = \frac{\epsilon}{N}$ ואז
$\bar{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum\limits_{E_{\geq\epsilon}} \omega_i \Delta x_i + \sum\limits_{E_{<\epsilon}} \omega_i \Delta x_i \leq |E_{\geq\epsilon}| \cdot \frac{\epsilon}{N} + \sum\limits_{E_{<\epsilon}} \epsilon \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$.
וסיימנו.

מסקנה 1.26. הרכבה של פונקציות אינטגראביליות אינה בהכרח אינטגראבילית.

הוכחה. נגדיר $g(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ בקטע $[0,1]$. היא אינטגראבילית.

אבל $(g \circ R)(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$ אינה אינ' בקטע (בדומה לפונצקית דריכלה)

□

הערה 1.27. הרכבה $g \circ f$ כאשר:
1. g רציפה בקטע $[m, M]$ כאשר אלו החסמים של g
2. f אינט' בקטע $[a, b]$

אז ההרכבה היא אינט' ב- $[a, b]$
הוכחה: יהיה $\epsilon > 0$ נתון.
כיוון ש g רציפה במ"ש על $[m, M]$ אז
$\exists \delta > 0 : \forall s, t \in [m, M], |s - t| < \delta \Rightarrow |g(s) - g(t)| \epsilon$
f אינטגראבילית ולכן קיימת חלוקה: $T : a = x_0 < \cdots x_n = b$
של הקטע $[a, b]$ כך ש $\bar{S}(T, f) - \underline{S}(T, f) < \epsilon \cdot \delta$
נגדיר $A = \{i | \omega_i(f) \geq \delta\} \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$
למה 1 $\sum\limits_{i \in A} \Delta x_i \leq \epsilon$
הוכחה למה 1 : $\sum\limits_{i \in A} \delta \Delta x_i \leq \sum\limits_{i \in A} \omega_i(f) \Delta x_i = \bar{S}(T, f) - \underline{S}(T, f) < \epsilon \cdot \delta$

למה 2: עבור $i \notin A$ מתקיים $\omega_i(g \circ f) \leq \epsilon$
הוכחה למה 2: לפי הגדרת A נקבל $\omega_i(f) < \delta$ ולכן
$\forall s, t \in [x_{i-1}, x_i] : |f(s) - f(t)| \leq \omega_i(f) < \delta$ ולכן
$\forall s, t \in [x_{i-1}, x_i] : |g(f(s)) - g(f(t))| < \epsilon$ מרציפיות במ"ש של g
כעת, (נסמן את המקס' של g והמינ' ב M_g, m_g)

$$\begin{aligned}
\bar{S}(T, g \circ f) - \underline{S}(T, g \circ f) &= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \omega_i(g \circ f) = \\
&\sum_{i \in A} \Delta x_i \omega_i(g \circ f) + \sum_{i \notin A} \Delta x_i \omega_i(g \circ f) \\
&\leq \sum_{i \in A} \Delta x_i (M_g - m_g) + \sum_{i \notin A} \Delta x_i \epsilon \\
&\leq \epsilon(M_g - m_g) + \epsilon(b - a) = \epsilon \cdot C
\end{aligned}$$

סימנו.

תרגיל 1.28. חשב $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n})$

פתרון. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})$
נשים לב שזה בדיוק $\lim_{n\to\infty}\underline{S}(T)$ כאשר $T=0<\frac{1}{n}<\dots<\frac{n-1}{n}<1$ חלוקה של הקטע $[0,1]$ עבור הפונצקיה $f(x)=\frac{1}{1+x}$
ולכן $\lim_{n\to\infty}\underline{S}(T)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln|1+x||_0^1=\ln(2)$

משפט 1.29 (המשפט היסודי של החדו"א)**.** תהא $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ אזי הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ פונקציה קדומה שלה (כלומר $F'(x)=f(x)$ ב $[a,b]$)

תרגיל 1.30. חשב $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t})dt$

פתרון. נתחיל עם גזירת המונה:
נגדיר $F(x)=\int_0^x\sin(\sqrt{t})dt, g(x)=x^2$ אזי המונה הוא $(F\circ g)(x)$
ולכן הנגזרת שלו $F'(g(x))\cdot g'(x)=\sin(\sqrt{x^2})\cdot 2x=2x\sin(x)$ (בסביבה ימנית של 0)
כעת: $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t})dt=[\frac{0}{0},Lopital]=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\sin(x)}{3x^2}=\frac{2}{3}$

שימושים

נציין שהשיטות של האינטגאל הלא מסוים עובדות (בהתאמה מסוימת) לאינגאל מסוים:

- הצבה- $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\int_{g(\beta)}^{g(\alpha)}f(x)dx$ (אם $g:[\alpha,\beta]\to[g(\alpha),g(\beta)]$ גזירה ברציפות)
  למשל
  $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=[x=\sin(t),dx=\cos(t)dt,x=0\Rightarrow t=0,x=1\Rightarrow t=\pi/2]$
  $=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt=\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\frac{1}{2}[t+\frac{\sin(2t)}{2}|_0^{\pi/2}]=\frac{1}{2}[\pi/2-0]=\frac{\pi}{4}$
- אינטגראציה בחלקים: $\int_a^b f'gdx=fg|_a^b-\int_a^b fg'dx$
  למשל
  $\int_1^e\ln(x)dx=x\ln(x)|_1^e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1$

חישובים - שטח, נפח גוף סיבוב ואורך עקומה

תרגיל 1.31. מצא את השטח הכלוא בין המשוואות $y=-2x+4$ בין $x=1$ ל $x=3$

פתרון. נקודת חיתוך עם ציר xקיימת ב $x=2$ ולכן
$\int_1^2 -2x+4dx-\int_2^3 -2x+4dx = -x^2+4x\Big|_1^2-[-x^2+4x\Big|_2^3] = 4-[2]-[3-4] = 2+1=3$

נפח גוף סיבוב

תהא $f(x)$ פונצקיה רציפה אי שלילית בקטע $[a,b]$ אזי נפח גוף הסיבוב סביב ציר x הנוצר ע"י הגרף שלה נתון ע"י

$V=\int_b^b \pi f(x)^2dx$

הסבר: תהא חלוקה T של הקטע. לכל תת קטע $[x_{i-1}x_i]$- נכפול אותו בעיגול שרדיוסו $f(x_i)$

ונקבל סכום מקרב לנפח $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2\Delta x_i$ כאשר פרטמר החלוקה ישאף ל- 0 נקבל בגבול $\int_a^b \pi f^2(x)dx$

תרגיל: מצא נוסחא לחישוב נפח של כדור שרדיוסו r

פתרון: נחשוב על כדור שמרכזו בראשית הצירים- כדור זה הוא נפח גוף סיבוב של המשוואה $x^2+y^2=r^2$ כאשר $y\geq 0$

ולכן $y=\sqrt{r^2-x^2}$

נפח הכדור יהיה

$\int_{-r}^r \pi(r^2-x^2)dx = \pi(xr^2-\frac{x^3}{3})\Big|_{-r}^r = \pi(\frac{2}{3}r^3 - -\frac{2}{3}r^3) = \pi\frac{4}{3}r^3$

תרגיל 1.32. חשב את נפח גוף הסיבוב הנוצר ע"י סיבוב ציר x של $f(x)=\sqrt{8x}$ וחסום ע"י $x=0, x=2$

פתרון. פתרון: "נרוץ" על x ים בין 0 ל-2 . עבור כל dx קטן יש בקירוב עיגול ששטחו $\pi(\sqrt{8x})^2$ ולכן השטח הוא $\int_0^2 \pi 8xdx = 4\pi x^2|_0^2 = 16\pi$.

תהא $f(x)$ פונצקיה רציפה אי שלילית בקטע $[a,b]$ אזי נפח גוף הסיבוב סביב ציר y הנוצר ע"י הגרף שלה נתון ע"י

$V=\int_b^b 2\pi x\cdot f(x)dx$

הסבר: תהא חלוקה T של הקטע. לכל תת קטע $[x_{i-1}x_i]$ נסתכל על גליל חלול בגובה $f(x_i)$, רדיוס חיצוני x_i ורדיוס פנימי x_{i-1}

נקבל קירוב לנפח $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f(x_i)(x_i+x_{i-1})\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \pi f(x_i)x_i^2 - \pi f(x_i)x_{i-1}^2$

כאשר פרטמר החלוקה ישאף ל- 0 נקבל בגבול $\int_a^b \pi\cdot 2\cdot x\cdot f(x)dx$

תרגיל 1.33. חשב את נפח גוף הסיבוב הנוצר ע"י סיבוב ציר y של $f(x)=\sqrt{8x}$ וחסום ע"י $x=0, x=2$

פתרון. $2\pi\int_0^2 x\sqrt{8}\sqrt{x}dx = 4\pi\sqrt{2}(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2) = 4\pi\sqrt{2}\frac{2}{5}2^{2.5} = 4^3\pi/5$

אורך עקום

תהא $f(x)$ גזירה ב $[a,b]$. אורך העקום $f([a,b])$ נתון ע"י $L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$

הסבר: תהא חלוקה T של הקטע. לכל תת קטע $[x_{i-1}x_i]$ נסתכל על קירוב של הפונצקיה ע"י ישר.

אורך הישר הוא $\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$

ולכן קירוב לאורך העקום הוא

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})})^2}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\sqrt{1+f'(c_i))^2}$$

כאשר $c_i\in[x_{i-1},x_i]$

כאשר פרטמר החלוקה ישאף ל- 0 נקבל בגבול $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$

דוגמה 1.34. נחשב את אורך העקום של $f(x)=\ln(x)$ בקטע $[1,2]$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=$$
$$[t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x=\sqrt{t^2-1},dx=\frac{2t}{2\sqrt{t-1}}dt,x\in\big[1,2\big]\Rightarrow t\in\big[\sqrt{2},\sqrt{5}\big]\big]$$
$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}1+\frac{1}{t^2-1}dt$$
$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}1+\frac{1}{2}[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}]dt=t+\frac{1}{2}[\ln|t-1|-\ln|t+1|)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}$$
$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1})-[\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})]$$

עוד אופציות: הוכחת תכונות האינטגרל המסויים ישירות מההגדרה. לדוגמה, שהאינטגרל מ-a ל-b פלוס אינטגרל מ-b ל-c שווה לאינטגרל מ-a ל-c, או שאינטגרל של פונקציה אי-זוגית (אינטגרבילית) על קטע סימטרי מתאפס, או ליניאריות האינטגרל, וכדו'.

מקורות

[1] אתר הקורס, www.math-wiki.com.