(2) מרחבי הילברט: הגדרה, משפט על ההיטל (מצאו קירוב טוב ביותר), התכנסות טורים

(3) פונקציונלים לינאריים: משפט ההצגה של ריס, נורמה של פונקציונל (חישוב), משפט האן-בנך, התכנסות חלשה/ בנורמה (נתונה סדרת פונקציונלים. האם מתכנסת חזק/ חלש? למה?) מרחב דואלי.

(4) אופרטורים: ספציפיים שדיברנו - אלכסוני, הכפלה בפונקציה, אופרטור אינטגרלי. (חישוב נורמה של אופרטור. נתונה סדרת אופרטורים האם מתכנסת עוצמתית? בנורמה? לאיזה אופרטור?).
אופרטור הפיך - הגדרה ותכונות, רזולבנטה. ספקטרום.
(מציאת ספקטרום של אופרטור וסיווג לע"ע + ספקטרום רציף).
פיתוח לטור של רזולבנטה. אופרטורים של וולטרה ופרדהולם.
מימד סופי: מציאת ספקטרום/ ע"ע. אופ' קומפקטי. משפט האלטרנטיבה של פרדהולם. אופ' צמוד (הגדרה. האם אופ מסוים הוא קומפ'? צ"ע? מצאו את האופ' הצמוד של ...), הדוגמא האחרונה חשובה.
הדוגמאות שעשינו בכיתה, תרגילי בית, שאלות חזרה.

* $(l^p)^* \approx l^q$.

שעות קבלה למבחן: 27.6 - 11^{00}.
17.7 - 12^{00}
בנין 216 חדר 208.

(המשך): $\boxed{\lambda_n = \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+\pi n)^2}}$ $(n\geq 0)$

והפונ' העצמיות: $\boxed{e_n(s) = \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{נירמול}}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)s}$

$\{e_n\}$ בסיס א"נ של פ"ע

תרגיל: הראו שאם $\lambda<0$ אין ע"ע שלילי.

$$\Rightarrow \|A\| = |\lambda_0| = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$$

$$\|J\| = \sqrt{\|A\|} = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

פ"ע: $f(s)=\cos\frac{\pi}{2}s$ (של $A=J^*J$)

$$\|Af\| = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\|f\| \quad , \quad Af = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 f$$

מיהי הפונ' ה"ממקסמת"? (שימו לב - היא איננה פ"ע):

$$\|Jf\|^2 = \langle Jf, Jf\rangle = \langle J^*Jf, f\rangle =$$

$$= \langle Af, f\rangle = \lambda_0 \langle f,f\rangle = \lambda_0\|f\|^2$$

המבחן: 18/7 בשעה 12^{00}, 3 שעות.

5 שאלות, כ"א 22 נקודות. (סה"כ 110 נקודות).

שאלות הגדרה, משפטים, דוגמאות קונקרטיות, תשובות ענייניות.

החומר: (1) מרחבים לינאריים נורמיים (האם מרחב מטרי הוא שלם, ספרבילי, האם תת קבוצה פתוחה, סגורה, קומפקטית, קדם-קומפקטית, איזומטריה - האם שני מרחבים איזומטריים).

מרחבים חשובים: $L^2(I)$, $C(I)$, $l_1, l_2, \dots, l_\infty$ (l_p)

(המשך):

$$(K^* * K)(s,t) = \int_0^1 K^*(s,\tau)\,K(\tau,t)\,d\tau =$$

$$= \int_{\max(s,t)}^{1} d\tau = \begin{cases} 1-s, & t<s \\ 1-t, & t>s \end{cases}$$

• $(Af)(s) = (1-s)\int_0^s f(t)\,dt + \int_s^1 (1-t) f(t)\,dt$

A קומפ' + צמ"ע, $|\lambda_0| = \|A\| = \|J\|^2$.

(הערה: עבור אופרטור כללי, ואפילו קומפקטי, לא בהכרח $\|A\| = \lambda_0$!
(לדוגמא האופרטור של Volterra). צריך קומפקטי + צמ"ע.)

ע"ע של A: $(1-s)\int_0^s f(t)\,dt + \int_s^1 (1-t) f(t)\,dt = \lambda \cdot f(s)$ (1)

$(\lambda \neq 0)$

מהמשוואה f רציפה וגזירה ∞ פעמים.

נגזור ב-s:

(**) $-\int_0^s f(t)\,dt + \cancel{(1-s)f(s)} - \cancel{(1-s)f(s)} = \lambda \cdot f'(s)$

ונגזור שוב: $-f(s) = \lambda \cdot f''(s)$

משוואה $f''(s) = -\frac{1}{\lambda} f(s)$
דיפרנציאלית

נניח $\lambda > 0$.

$$f(s) = C_1 \cos\frac{s}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \sin\frac{s}{\sqrt{\lambda}}$$

תנאי שפה: (*) $s=1 \Rightarrow f(1)=0$ (זכור כי בע"ע)

(**) $s=0 \Rightarrow f'(0)=0$ שטורם-ליוביל.

$f'(0)=0 \Rightarrow C_2 = 0$.

$f(1)=0 \Rightarrow C_1 \cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$.

$\Rightarrow \lambda$ ע"ע $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \geq 0)$

(המשך):

$$(Je_n)(s) = \int_{\mathbb{T}} K(s-t)\, e^{int}\, \frac{dt}{2\pi} = [u = s-t]$$

$$= \int_{\mathbb{T}} K(u)\cdot e^{in(s-u)}\, \frac{du}{2\pi} = e^{ins} \underbrace{\int_{\mathbb{T}} K(u)\, e^{-inu}\, \frac{du}{2\pi}}_{\text{מקדם פורייה - } \hat{K}(n).}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{Je_n = \hat{K}(n)\cdot e_n}$$

מצאנו את הערכים העצמיים... $\lambda_n = \hat{K}(n)$

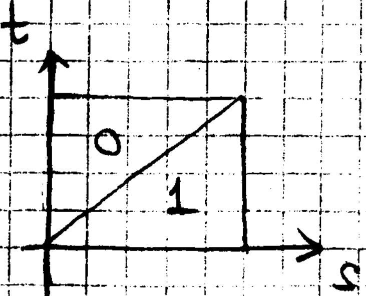
דוגמא: $I = [0,1]$, $(Jf)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$

שאלה: $\|J\|_{L^2 \to L^2} = ?$

$$\|J\|_{L^2 \to L^2} = \sup_{f \neq 0} \frac{\left\| \int_0^s f(t)\,dt \right\|_{L^2(I)}}{\|f\|_{L^2(I)}} = ?$$

עבור $f \equiv 1$, אזי $\|f\| = 1$, ו- $(Jf)(s) = s$, לכן:

$$\|Jf\| = \sqrt{\int_0^1 s^2\,ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \|J\| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$



אבל מהו מדויק?
$$K(s,t) = \begin{cases} 1, & t<s \\ 0, & t>s \end{cases}$$

(הגרעין - "גרעין אינטגרלי" של האופרטור).

"טריק": נתבונן ב- $A = \underbrace{J^* J}_{\text{צ"ע!}}$. $\|A\| = \|J\|^2$.

$$K^*(s,t) = \overline{K(t,s)} = \begin{cases} 0, & t<s \\ 1, & t>s \end{cases}$$

ii) הבעיה ממשיכה מס' בן-מניה של עצמיים, ומתכנסים מע'

א"ע: $e_1, e_2, \dots$, $Ae_n = \lambda_n e_n$,

$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \dots > 0$ (אינסוף ע"ע עוובים).

נסמן: $E = \overline{\mathrm{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$. אם $E = H$: $\{e_n\}$ בסיס א"נ

אחרת: נפרק ב- $E^{\perp}$, נוכיח ש- $A|_{E_n} = 0$.

הוכחה: $|\lambda_n| = \|A|_{H_n}\| \longrightarrow 0$ אבל $E^{\perp} \subset H_n$:

$$\|A|_{E^{\perp}}\| \le \|A|_{H_n}\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|A|_{E^{\perp}}\| \overset{\text{מקומ'}}{=} \underline{0}$$

נבחר בסיס א"נ $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots$ ל- $E^{\perp}$ (ע"ע אפס) ונצרף

לווקטורים $e_1, e_2, \dots$ לקבל בסיס א"נ של H.

דוגמאות:

⊛ $L^2(I)$, $K(s,t) \in L^2(I \times I)$, והאופ' האינטגרלי:

$$(Jf)(s) = \int_I K(s,t) f(s)\, ds$$

J קומפקטי,

וצ"ע אם $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$.

$$\int_I K(s,t) f(s)\, ds = \lambda \cdot f(s) \iff f \text{ ע"ע של } J \quad f \not\equiv 0$$

יש בסיס א"נ של ו"ע, $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to 0$,

$J e_n = \lambda_n e_n$.

דוגמא: $K(s,t) = K(s-t)$, $I = [-\pi, \pi]$, $K(t) \in L^2(I)$.

K ממשית וזוגית

(כדי שהאופ' יהיה צ"ע.

פרט לכך לא רלוונטי להמשך)

פונ' מעריכיות:

$e_n(t) = e^{int}$

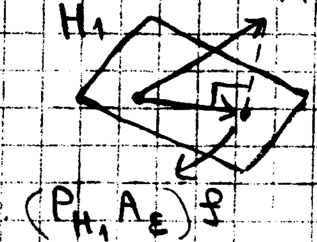
$(n \in \mathbb{Z})$

(2)

(הוכחה): $\underbrace{P_{H_1}}_{\text{הטלה על } H_1} A_\varepsilon (H_1) \subset H_1$.

(תרגיל: הרכבה של אופ' A קומפקטי עם B אופרטור חסום היא אופ' קומפקטי

קומפקטי - AB, BA. (קל))



$P_{H_1} A_\varepsilon$ קומפקטי, ו-:

$$\|A - P_{H_1} A_\varepsilon\|_{H_1 \to H_1} < \varepsilon$$

$$\|P_{H_1}(A - A_\varepsilon)\| \le \underbrace{\|P_{H_1}\|}_{\le 1} \|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$$

($f = \underset{H_1}{f_1} + \underset{H_1^\perp}{f_2}$:"פיתגורס"

ולכן: $\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \Rightarrow \|f_1\| \le \|f\|$).

$A: H_1 \to H$ קומפקטי וצ"ע

$$\exists e_2 \in H_1, \quad A e_2 = \lambda_2 e_2, \quad |\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda_2}| = \|A\|_{H_1 \to H_1} \le |\lambda_1|$$

$$\|e_2\| = 1, \quad \langle e_2, e_1 \rangle = 0.$$

וכו': $E_2 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$, $H_2 = E_2^\perp$.

$A(H_2) \subset H_2$. [טענה: אם A צ"ע, $A(E) \subset E$ (מ"ו E)

אז $A(E^\perp) \subset E^\perp$. בדוק! ∎

טענה: אם A קומפקטי ב-H, $\tilde{H} \subset H$ תת מרחב סגור אורתוגונלי,

אז $A|_{\tilde{H}_1 \to \tilde{H}_1}$ קומפקטי.

וממשיכים: $e_3, e_4, e_5, \dots$ וכו' $|\lambda_3| \ge |\lambda_4| \ge |\lambda_5| \ge \dots$.

2 אפשרויות: (i) במצב מסוים נקבל $\|A\|_{H_n \to H_n} = 0$, $\begin{pmatrix} \lambda_n & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

כלומר $A|_{H_n} = 0$. נבחר בסיס אורתונורמלי ל-H_n של ע"ע אפסיים

אם ע"ע 0, $e_1, e_2, \dots, e_n$, $A e_k = \lambda_k e_k$ $(1 \le k \le n)$ ⟸ סיום

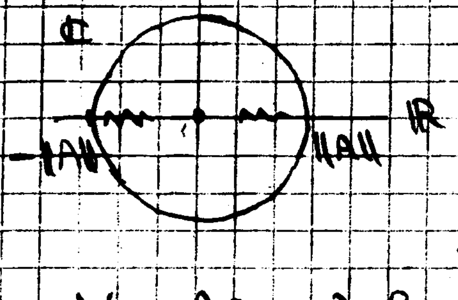
17.6.13

אנליזה מודרנית 2 - הרצאה:

תזכורת: אופרטור $A: H \to H$ נקרא לצמוד לעצמו (צ"ע) אם:

$A = A^*$; $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

$\mathrm{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$, $r(A) = \|A\|$.



משפט הספקטרלי: (H ספרבילי).

$A: H \to H$ אופרטור קומפקטי וצ"ע.

אז קיים בסיס א"נ $\{e_n\}$ כך ש: $\forall_n\ Ae_n = \lambda_n e_n$ ו-

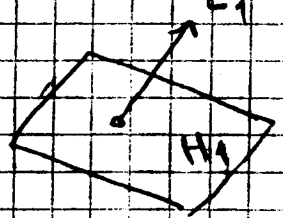
(i) $\lambda_n \in \mathbb{R}$ לכל n (ii) $\lambda_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

הוכחה: $r(A) = \|A\| \Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathrm{Spec}(A) : |\lambda_1| = \|A\| > 0$.

לפי האלטרנטיבה של פרדהולם, λ_1 הוא ע"ע:

$\exists e_1,\ Ae_1 = \lambda_1 e_1,\ \|e_1\| = 1$

$\lambda_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = \|A\|$ או $\lambda_1 = -\|A\|$.



נסמן: $E_1 = \mathrm{Span}\{e_1\}$, ונגדיר $H_1 = E_1^{\perp}$.

נראה כי: $A|_{H_1} : H_1 \to H_1$ (?)

$A(H_1) \subseteq H_1$ -ו , $0 < \|A\|_{H_1 \to H_1} \le \|A\|_{H \to H}$ (ת"מ אינווריאנטי)

• $f \in H_1 \Rightarrow \langle f, e_1\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\langle Af, e_1\rangle = \langle f, Ae_1\rangle = \underbrace{\lambda_1}_{\in \mathbb{R}} \langle f, e_1\rangle = 0 \Rightarrow Af \in H_1$$

$A|_{H_1}$ צ"ע וקומפקטי:

צ"ע: $\forall f, g \in H_1 : \langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$

קומפ': A קומפקטי ב-H ולכן:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon$ (מימד סופי): $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$

42 10.6.13
למניים!!

בס"ד

אנליזה מודרנית 2

7

• אז ניתן למצוא מספר יותר לא

<u>הגדרה:</u>

$$r(A) = \overset{\max}{\sup_{\lambda \in spec(A)}} |\lambda|$$

בס"ד

10.6.13

שמונים!!

אנליזה מודרנית ב' (6)

הילד = אופרטור שאם מפעילים אותו פעמיים הוא כמו לא משנה

כלומר על התמונה הוא פועל כזהות

<u>טענה:</u> אם A צ"ע אז $Spec(A) \subset \mathbb{R}$

<u>הוכחה</u>

נניח עבור ע"ע. נניח λ ע"ע.

ע"ע: $\exists\, x \neq 0 : Ax = \lambda x$

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}$$

<u>משפט:</u> אם A צ"ע אז $\|A^n\| = \|A\|^n$ לכל n.

- $\leq$ ברור
- $\geq$ באינדוקציה $n=2$: $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$

$n=4$: $\|A^4\| = \|\underbrace{(A^2)}_{\text{צ"ע}}{}^2\| = \|A^2\|^2 = \|A\|^4$

$\vdots$

$n = 2^k \quad k = 1, 2, \ldots$

- $n=5$: $\|A^8\| = \|A^5 A^3\| \leq \|A^5\| \cdot \|A^3\| \leq \|A\|^8$

אבל בחזקות זוגיות יש שוויון.

אילו היה $\|A^5\| < \|A\|^5$ לא היה שוויון - סתירה

$$R_\lambda(A) = \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \frac{A^3}{\lambda^3} + \ldots\right)$$

הטור מתכנס אם $|\lambda| > \|A\|$ כי אז הוא טור גאומטרי

<u>הגדרה:</u> $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ נוכיח שהגבול קיים

הרדיוס הספקטרלי של A

קיים מהלמה הבאה:

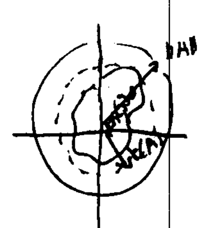
אם $\{a_n\}$ סדרת מספרים חיוביים

וגם $a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m$

אז $\exists \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$

ונקבל אם $|\lambda| > r(A)$ אז הטור מתכנס

$$\left\| \frac{A^n}{\lambda^n} \right\| \leq \left(\frac{r(A) + \varepsilon}{\lambda} \right)^n$$



תמיד:

$$r(A) \leq \|A\|$$

קיבלנו הסבה יותר טובה היכן נמצא הספקטרום

אם A צ"ע אז $r(A) = \|A\|$

בס"ד

47 10.6.13
למי"נל!!

אנליזה מודרנית ב ②

$\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$ קיבלנו

* אופרטורים צמודים לעצמם (self-adjoint operators)

$A: H \to H$ נקרא צמוד לעצמו (צ"ל).

באופן שקול: $\forall x,y \quad \langle Ax,y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

דוגמאות: ① A^*A צ"ל

$$(A^*A)^* = (A^*(A^*)^*) = A^*A$$

② אופרטור אלכסוני: $A: e_n \longmapsto \lambda_n e_n$

צ"ל $\Leftrightarrow \lambda_n \in \mathbb{R}$

③ $f \longmapsto \lambda(t) f(t)$, צ"ל $\Leftrightarrow \lambda(t) \in \mathbb{R}$ כמעט לכל t.

④ $= \overline{K(t,s)} = K(s,t)$

צ"ל $\Leftrightarrow$

• נניח A צ"ל $\left\{ \langle Af,f\rangle \underset{\text{צ"ל}}{=} \langle f,Af\rangle \underset{\text{תכונות מ"פ}}{=} \overline{\langle Af,f\rangle} \right. \Rightarrow \langle Af,f\rangle \in \mathbb{R}$

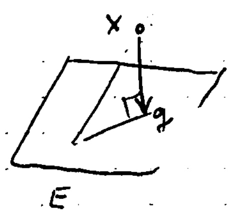
גם הכיוון השני נכון.

תכונות: • A,B צ"ל $\Rightarrow$ $A\pm B$ צ"ל

• אם $\lambda\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ λA צ"ל

$$(AB)^* = B^*A^* = BA = AB$$

אם A,B מתחלפים כלומר $AB=BA$



נניח $E\subset H$ תת מרחב סגור.

$P_E: x \longmapsto y$

ההטלה האורתוגונלית על E

תרגיל: ① $\|P_E\| = 1$

② P_E צ"ל

③ $\operatorname{spec}(P_E) = ?$

בס"ד

10.6.13
למניינם!!

אנליזה מודרנית 2 (4)

③ אופ' אינטגרלי ב $L^2(I)$

תנאי מספיק לחסימות $K(s,t) \in L^2(I \times I)$

$(Jf)(s) = \int_I K(s,t) f(t)\, dt \quad , \quad J^* = ?$

חידוני - פנימי
פנימי - אופרטור

$$\langle Jf, g \rangle = \int_I \left[\int_I K(s,t) f(t)\, dt \right] \overline{g(s)}\, ds$$

$$= \int_I \left[\int_I K(s,t)\, \overline{g(s)}\, ds \right] f(t)\, dt$$

$$= \int_I f(t)\, \overline{\left[\int_I \overline{K(s,t)}\, g(s)\, ds \right]}\, dt$$

$$= \langle f, J^* g \rangle \quad , \quad J^* : g(t) \longmapsto \int_I K^*(s,t)\, g(t)\, dt$$

$$K^*(s,t) = \overline{K(t,s)}$$ (הצמדה ושחלוף)

למשל עבור $K(s,t) = t \cdot s^2 \Rightarrow K^*(s,t) = s \cdot t^2$

④ $\ell^2 = \{ (x_1, x_2, \dots) \}$ $\quad \sum |x_i|^2 < \infty$

הזזה ימינה $S : (x_1, x_2, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots)$

$S^* : (y_1, y_2, \dots) \longmapsto (y_2, y_3, \dots)$

תרגיל - לבדוק

תכונות:

- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^*$ (לבדוק)
- $(AB)^* = B^* A^*$
- $\|A^* A\| \le \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2$ $\quad$ תזכורת $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$

* טענה: $\|A^* A\| = \|A\|^2$

הוכחה

$\|A^* A\|_{op} = \sup_{\|x\| \le 1} \|A^* A x\|_H = \sup_{\|y\| \le 1,\ \|x\| \le 1} |\langle A^* A x, y \rangle|$ $\quad$ כיוון אחד הוכחנו,

[illegible]

תזכורת $\left[\|z\|_H = \sup_{\|y\| \le 1} |\langle z, y \rangle| \right]$

$= \sup_{\|x\|, \|y\| \le 1} |\langle Ax, Ay \rangle| \ge \sup_{\|x\| \le 1} |\langle Ax, Ax \rangle| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2$

אנליזה מודרנית 2 (3)

* אופרטור צמוד $A: H \longrightarrow H$

לינארי $\varphi_y(x) := \langle Ax, y \rangle$, $y \in H$

(חסום) $|\varphi_y(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \le \|Ax\|\,\|y\| \le \|A\|\,\|y\|\,\|x\|$

$\|\varphi_y\|_{H^*} \le \|A\| \cdot \|y\|$.

לפי משפט Riesz $\varphi_y(x) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^* \rangle$

קבלנו התאמה $A^* := y \longrightarrow y^*$

A^* נקרא האופרטור הצמוד של A.

✓ לינארי , ✓ חסום $\|y^*\|_H = \|\varphi_y\|_{H^*} \le \|A\| \cdot \|y\|$

קיבלנו גם ש $\|A^*\| \le \|A\|$

משפט: לכל $A: H \longrightarrow H$ קיים $A^*: H \to H$ יחיד כך ש

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall\, x, y \in H$

נשים לב: $(A^*)^* = A$

$\langle A^* x, y \rangle = \overline{\langle y, A^* x \rangle} = \overline{\langle Ay, x \rangle} = \langle x, Ay \rangle$

$\Rightarrow \quad \|A\| = \|A^*\|^* \le \|A^*\| \quad \Rightarrow \quad \|A\| = \|A^*\|$

דוגמאות

(1) אופרטור אלכסוני: H, $\{e_n\}$ בסיס א"נ, $\{\lambda_n\}$ סדרה חסומה,

$A: f = \sum c_n e_n \longmapsto Af = \sum c_n \lambda_n e_n$

מהו A^*? אלכסוני עם הסדרה $\{\bar{\lambda}_n\}$ בבסיס $\{e_n\}$

• תרגיל - בדוק (לבדוק עצמי)

(2) $L^2(I)$ $\lambda(t): I \longmapsto \mathbb{C}$ פונ' חסומה (מדידה)

$A: f(t) \longmapsto \lambda(t) f(t)$ $[\|A\| = \text{ess sup}\, |\lambda(t)| < \infty]$

$A^* = ?$

$\langle Af, g \rangle = \langle \lambda(t) f(t), g(t) \rangle = \int_I \lambda(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt = \int_I f(t) \overline{\overline{\lambda(t)} g(t)}\, dt$

$= \langle f, \underbrace{\overline{\lambda(t)} \cdot g(t)}_{= A^*} \rangle \quad \Rightarrow \quad A^*: g(t) \longmapsto \overline{\lambda(t)}\, g(t)$

10.6.13
למניינים:

אנליזה מודרנית ② ב

$D_\lambda : X \to X_\varepsilon$

האם $I+D_\lambda$ הפיך? שתי אפשרויות: ① הפיך λ ערך רגולרי של A

② אם לא, יש $g \neq 0$ כך ש $(I+D_\lambda)g = 0$ $\quad (I-(-D_\lambda))$

$$g = (B_\varepsilon - \lambda I)f \quad , \quad f = (B_\varepsilon - \lambda I)^{-1} g$$

$$\Rightarrow (A-\lambda I)f = (\cdots)\underbrace{(B_\varepsilon - \lambda I)f}_{g} = 0$$

כלומר f ו"ע של A עם ע"ע λ (לא הוכחה חלק ראשון)

$$\varphi(\lambda) := \det(I+D_\lambda)\Big|_{X_\varepsilon \to X_\varepsilon} \overset{?}{=} 0$$

$\varphi(\lambda)$ פונקציה אנליטית בלמבדה ולכן יש רק מספר סופי של אפסים

$$I + D_\lambda = I + A_\varepsilon R_\lambda(B_\varepsilon) = I + A_\varepsilon \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(I + \frac{B_\varepsilon}{\lambda} + \frac{B_\varepsilon^2}{\lambda^2} + \dots\right)$$

ויש לפתח מקדם אחר כך

• $0 \notin spec(A) \iff A$ הפיך

$\Downarrow$

$I = \underset{\vee}{A} \cdot A^{-1}$ קומפקטי ⇐ I קומפקטי ⇐ כפול מטריצה הוא גם קומפקטי ⇐ וזה לא נכון ⇐ $0 \in spec\{A\}$

להראות כי הכדור לא פרה קומפקטי ב $\ell^2, \ell^\infty, C(I), L^2(I)$

תרגיל: הוכיחו כי אם A קומפקטי ו B חסומה אזי AB וגם BA קומפקטיים.

10.6.13
למינים!!

אנליזה מודרנית ב (1)

תזכורת: X מרחב שלם (בנך)

$A: X\to X$ אופרטור קומפקטי $\forall \varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon : X\to X_\varepsilon$, $\dim(X_\varepsilon)<\infty$

$\|A-A_\varepsilon\|<\varepsilon$

משפט: A אופרטור קומפקטי, אזי: $A(U)$ קב' פרה-קומפקטית. $U=\{x : \|x\|\le 1\}$

יכול שיהיה כל קבוצה חסומה U

זהו גם תנאי מספיק לקומפקטיות

• תרגיל (רשות): להוכיח כי במרחב הילברט H ההיפך גם נכון

- דוגמאות: (1) אופ' אינטגרלי ב $L^2[I]$ $K(s,t)\in L^2(I\times I)$

ב $C(I)$ $K(s,t)\in C(I\times I)$

(2) אופ' אלכסוני: $H=\text{span}\{e_n\}$ הילברט, בסיס אורתונורמלי

$Ae_n=\lambda_n e_n$ [תנאי לקומפקטיות $\lambda_n\to 0$]

משפט: האלטרנטיבה של Fredholm

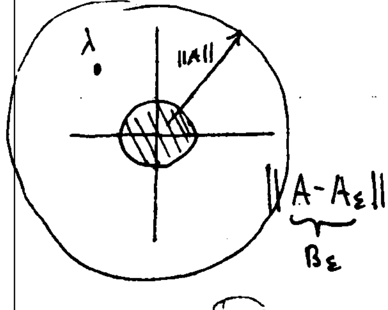
$A: X\to X$ אופ' קומפקטי, אזי

(1) לכל $\lambda\neq 0$: או λ היא נק' רגולרית של A

או λ ע"ע של A

(2) קבוצת הערכים העצמיים היא סופית או בת מנייה! $\lambda_n\to 0$

$\text{spec}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,0\}$



הוכחה

יהי $\varepsilon>0$. יהי $|\lambda|>\varepsilon$

האם $A-\lambda I$ הפיך?

A קומפקטי ולכן יש אופרטור מקורב A_ε כך ש $\|\underbrace{A-A_\varepsilon}_{B_\varepsilon}\|<\varepsilon$

$$A-\lambda I = A_\varepsilon + \underbrace{(B_\varepsilon-\lambda I)}_{\text{הפיך}} = A_\varepsilon+\lambda\overbrace{\left(\frac{B_\varepsilon}{\lambda}-I\right)}^{\|\cdot\|<1}$$

הפיך כי ... (המשפט) ... שנורמה קטנה מ 1 הוא הפיך

$$=\underbrace{(I+A_\varepsilon \overset{\text{סימן אחר}}{R_\lambda}(B_\varepsilon))}_{\text{האם זה הפיך וזו המכפלה הפוכה}}\underbrace{(B_\varepsilon-\lambda I)}_{\text{הפיך}}\quad,\quad D_\lambda := A_\varepsilon\cdot R_\lambda(B_\varepsilon) \text{ סימון}$$

בס"ד

אנליזה מודרנית 2

ניסוח שקול: אם A קומפקטי ~~[illegible]~~

אזי לכל סדרה $\{f_n\}$, $\|f_n\|\le 1$ קיימת ת"ס כך ש: Af_{n_j} מתכנסת

<u>הוכחה</u>

יהי $\varepsilon>0$. נמצא ε-רשת סופית עבור $A(u)$.

כיוון ש A קומפקטי קיים A_ε ממימד סופי כך ש $\|A-A_\varepsilon\|<\varepsilon$

נסתכל על $A_\varepsilon(u)$ זוהי סגורה חסומה (כי האופרטור חסום) בתת מרחב ממימד סופי ולכן היא קומפקטית.

יהי Y ε רשת עבור $A_\varepsilon(u)$

נראה כי Y הוא 2ε-רשת עבור $A(u)$

יהי $\|f\|\le 1$.

$$\|Af-A_\varepsilon f\| \le \underbrace{\|A-A_\varepsilon\|}_{\le\varepsilon}\,\underbrace{\|f\|}_{\le 1} \le \varepsilon$$

$$\exists y\in Y : \|y-A_\varepsilon f\|\le\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|y-Af\|\le 2\varepsilon$$

<u>תרגיל:</u> אופ' אלכסוני בסיס א"נ $\{e_n\}$, $\overset{\text{ספ'}}{H}$ $A: e_n \to \lambda_n e_n$

אופ' חסום $\Leftrightarrow$ $\|A\|=\sup|\lambda_n|<\infty$

אופ' הפיך $\Leftrightarrow$ $\inf|\lambda_n|>0$

להוכיח שאופרטור קומפקטי $\Leftrightarrow$ $\lambda_n\to 0$ $(n\to\infty)$

מתי אופרטור ממימד סופי? (כאשר λ מתאפסים מאינדקס מסוים)

בס"ד

7.6.13

אנליזה מודרנית ב (4)

תרגיל: ב $L^2(I)$, $C(I)$ $\qquad I=[-\pi,\pi]$

$$(Jf)(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s-t)\, f(t)\, dt$$

(1) $\mathrm{spec}(J) = ?$ $\qquad$ לפתור את $\cos(s-t)$ לצורה $\sum_{j=1}^{N} S_j(s)\, T_j(t)$

(2) $(Jf)(s) = f(s)+1$ $\qquad$ פתור את המשוואה

* **אופרטורים קומפקטיים** (X מרחב בנך ([illegible]))

הגדרה: $A: X \to X$ הוא "קומפקטי" אם

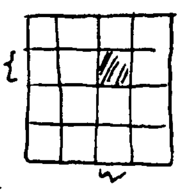
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists A_\varepsilon : X \to \underbrace{X_\varepsilon}_{\text{תת ממימד סופי}} , \quad \|A-A_\varepsilon\|<\varepsilon$$

דוגמא: אופרטור אינטגרלי עם גרעין $K(s,t)\in L^2(I\times I)$

למעשה שאם האופרטור ב L^2 הגרעין חסום

למעשה שהנורמה של האופרטור האינטגרלי נשלטת ע"י הגרעין

יהי $\varepsilon>0$, נמצא גרעין K_ε כך ש $\|K-K_\varepsilon\|_{L^2(I\times I)} < \varepsilon$



$P_{ij} = I_i \times I_j$

$1_P(s,t) = 1_{I_i}(s)\, 1_{I_j}(t)$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$$

$$K_\varepsilon(s,t) = \sum_{i,j} c_{i,j}\, 1_{I_i}(s)\cdot 1_{I_j}(t)$$

וכבר הוכחנו שגרעין מהצורה הזו הוא ממימד סופי

[קירבנו בעזרת פונקציות מדרגות]

ניתן גם ע"י טור פוריה

$$K_\varepsilon(s,t) = \sum_{k=-l}^{l}\sum_{j=-l}^{l} c_{kj}\, e^{iks} e^{ijt}$$

משפט: אם A אופרטור קומפקטי אז $\qquad u = \{f : \|f\|\le 1\}$

$A(u)$ קבוצה פרה-קומפקטית

$A(u)$

37 7.6.13

אנליזה מודרנית 2

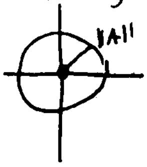
$$|K_{n-1}(s,t)| \le M^n \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$ באינדוקציה נקבל

$$\le M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$ $\sum \frac{\alpha^n}{n!} < \infty$

⇐ כל $\lambda \neq 0$ הוא ערך רגולרי כי הטור מתכנס.

$spec(J) \subseteq \{0\} \Rightarrow spec(J) = \{0\}$ (לא ריק)

נתן דוגמא לאינטגרל וולטרה



אם ספקטרום שהוא נקודה אחת

* אופרטורים עם מימד סופי

$A: X \to X_0 \subset X$, $\dim X_0 = N < \infty$

(רוצים לחקור את הספקטרום שלו)

① $\underbrace{Af}_{f_0 \in X_0} = \lambda f + g$ $(\lambda \neq 0)$

$\Updownarrow$

$$f = \frac{1}{\lambda} f_0 - \frac{1}{\lambda} g$$

אם נפעיל את A על ① נקבל $Af_0 = \lambda f_0 + \underbrace{Ag}_{g_0 \in X_0} = \lambda f_0 + g_0$.

נסמן $A_0 = A|_{X_0} : X_0 \to X_0$

$\det(A_0 - \lambda I)$ אלו = שורשים של הפולינום האופייני

משפט: $sp(A) = \{\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N}_{\text{שורשים של הפולינום האופייני של } A_0 \ \det(A_0-\lambda I)=0}, 0\}$

תרגיל: להוכיח! (להראות ששתי המטריצות שקולות)

$0 \in sp(A) \Leftrightarrow A$ לא הפיך וזה ברור כי A לא על.

דוגמא: אופ' אינטגרלי $K(s,t) = \sum_{j=1}^{N} S_j(s) T_j(t)$ (גרעין מנוון)

טענה: זהו אופרטור ממימד סופי

$$(Jf)(s) = \int_I \left(\sum_{j=1}^{N} S_j(s) T_j(t)\right) f(t)\,dt = \sum_{j=1}^{N} S_j(s) \underbrace{\int_I T_j(t) f(t)\,dt}_{\text{מספר } a_j}$$

$Jf \in span\{S_1, \ldots, S_N\} \Rightarrow$ לכן תת מרחב ממימד סופי

7.6.13 לגמניוק::

אנליזה מודרנית 2

נתבונן במקרה בו $\lambda \neq 0$ $\qquad Jf = \lambda f + g$

נבדוק כאשר מתכנס

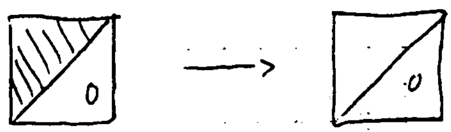
$$(J^2 f)(s) = J(Jf)(s) = J\left(\int_a^b K(\sigma,t)\, f(t)\,dt\right)(s)$$

$$= \int_a^b K(s,\sigma)\left[\int_a^b K(\sigma,t) f(t)\,dt\right] d\sigma$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left[\int_a^b K(s,\sigma)\, K(\sigma,t)\, d\sigma\right]}_{K_1(s,t)} f(t)\,dt$$

כלומר הרכבה של אופרטור אינטגרלי עם עצמו זה אופרטור אינטגרלי עם גרעין חדש.

• J^2 אופרטור אינטגרלי עם גרעין $K_1(s,t)$



$K(s,t) \qquad K_1(s,t)$

ובמקרה הפרטי אם K: גרעין משולש נראה שגם K_1 גרעין משולש

$$K_1(s,t) = \int_a^b \underbrace{K(s,\sigma)}_{\substack{\text{אז } 0\\ \sigma>s}}\ \underbrace{K(\sigma,t)}_{\substack{\text{אז } 0\\ \sigma<t}}\, d\sigma = \int_t^s K(s,\sigma)\, K(\sigma,t)\, d\sigma \quad (s \geq t)$$

ואם $s>t$ אז הכל מתאפס

• נניח שהגרעין המקורי חסום $|K(s,t)| \leq M$

$$K_1(s,t) \leq M^2 (s-t)$$

$$(J^3 f)(s) = \int_a^b K(s,\sigma)\left[\int_a^b K_1(\sigma,t)\, f(t)\,dt\right] d\sigma = \int_a^b \underbrace{\left[\int_a^b K(s,\sigma)\, K_1(\sigma,t)\,d\sigma\right]}_{K_2(s,t)} f(t)\,dt$$

$$K_2(s,t) = \int_a^b K(s,\sigma)\, K_1(\sigma,t)\, d\sigma = \int_t^s \underbrace{K(s,\sigma)}_{\leq M}\ \underbrace{K_1(\sigma,t)}_{\leq M^2(\sigma-t)}\, d\sigma$$

$$\leq M^3 \int_t^s (\sigma - t)\, d\sigma = M^3 \left.\frac{(\sigma-t)^2}{2!}\right|_t^s = M^3 \frac{(s-t)^2}{2!}$$

36 7.6.13 שמיניות::

בס"ד

אנליזה מודרנית 2 ①

X - מרחב בנך (שלם)

$A: X \to X$ אופ' חסום

(i) λ "ערך רגולרי" אם $A-\lambda I$ הפיך, $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$

$$Af = \lambda f + g \Rightarrow f = R_\lambda g$$

כלומר קיים פתרון והוא יחיד

איזה? ↓ חח"ע ↓ וההפכי חסום

(ii) λ ערך עצמי $\exists f \neq 0 : Af = \lambda f$

$\lambda \in spec(A)$ [נק' ספקטרום נקודתי] $(Af - \lambda I)f = 0$

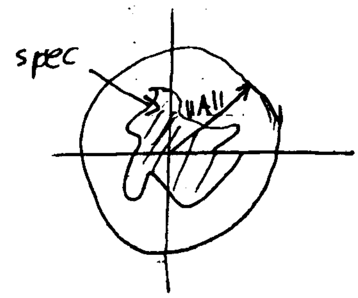
קיים f שהולך ל 0 וגם 0 הולך לס' $\Leftarrow$ $A-\lambda I$ לא חח"ע

$$spec(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ לא ערך רגולרי}\}$$

מעפל בנך אומר שאלו כל האפשרויות

(iii) λ נקודת ספקטרום רציף אם $A-\lambda I$ חח"ע ולא על.

תופעה רק במימד ∞



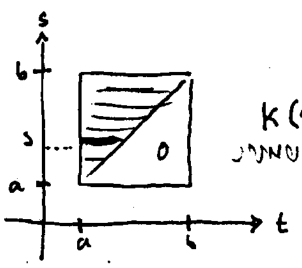
$|\lambda| > \|A\|$ $\Rightarrow$ λ ערך רגולרי

$$R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \dots\right)$$

טור לורן עם מקדמים אופרטור

<u>דוגמא</u>: אופרטור אינטגרלי של Volterra

$$\int_a^s K(s,t) f(t)\,dt = \lambda \cdot f(s) + g(s)$$



$K(s,t)$ נתון שמתחת $=0$

$$(Jf)(s) = \int_a^s K(s,t) f(t)\,dt$$

$$C(I), \quad L^2(I), \quad I = [a,b]$$

• מקרה פרטי: $\lambda = 0$ $K = \begin{cases} 1 & \text{מתחת האלכסון} \\ 0 & \text{מעל האלכסון} \end{cases}$

קיים פתרון רק אם g גזירה

$$\int_a^s f(t)\,dt = g(s)$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = g'(s)$$

$(A-\lambda_0 I)^{-1}[I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1} =$

זה הפיך

הפיך

כי מכפלת שני הפיכים, הפיכה

מספיק להוכיח ש:

$\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$

סקלר אופרטור

$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}=\varepsilon$

אופרטור הרזולוונטה

ואז נדע שבכדור ברדיוס ε ה-λ-ות יתנו אופרטור הפיך לפי המשפט שהוכחנו.

מתוך כך ניתן להסיק את הנוסחה הבאה:

$R_\lambda=R_{\lambda_0}\cdot\left(I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)^2 R_{\lambda_0}^2+\dots\right)$

זהו טור חזקות

ולכן כזה הוא פונ' אנליטית

ולכן הוכחנו את המשפט הבא:

משפט: R_λ (כפונקציה של λ) הוא פונקציה אנליטית בקבוצת הנקודות הרגולריות (שהיא קבוצה פתוחה)

פונ' שערכיה הם לא מספרים אלא אופרטורים

וניתן לחשב את הנגזרת במובן ש

$\frac{R_\lambda-R_{\lambda_0}}{\lambda-\lambda_0} \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} ?$

תרגיל (רשות): הוכח כי לכל אופרטור יש לפחות ערך בספקטרום אחת

לכל אופרטור יש תמיד לפחות ערך אחד בספקטרום.

נזכיר

ליוביל: פונ' שלמה (אנליטית בכל המישור המרוכב) וחסומה היא קבועה

איך נעבור מפונ' שמקבלת אופרטורים לפונ' שמקבלת מספרים?

ע"י מעבר מאופרטורים לאיברים ממרחב

$\lambda \to R_\lambda$

$\lambda \to R_\lambda x$ ← אלו עדיין לא מספרים אלא וקטורים

$\lambda \to \varphi(R_\lambda x)$ φ פונקציונל צריך פונ' שמקבלת מספרים

$\varphi \in X^*,\ x\in X$

וזו פונ' אנליטית

אם נראה שמקבלים 0 אז הוקטור חייב להיות 0 ולכן האופרטור הוא ה-0 ומקבלים סתירה

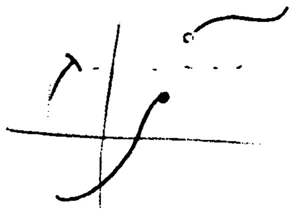
ושלבדוק ש + תנאי ב φ באופן רציף !

נבדוק ש

$$\left|\frac{1}{\varphi(t)-\lambda}\right| \le K$$ (כ.ב.מ.)

דוגמה ל λ עם ערך רגולרי:

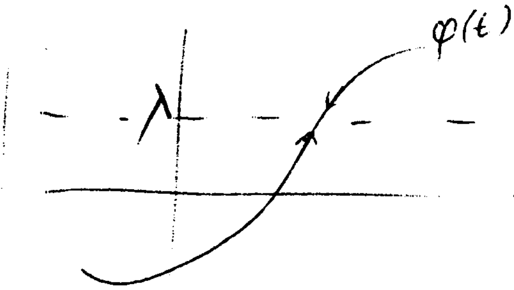
נבוט ב $\varphi(t)$ כזו:



λ ערך רגולרי $\Leftarrow$

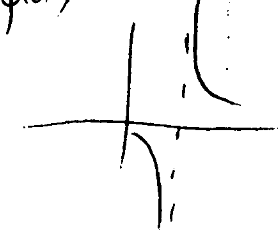
λ מרוחק מהערכים ש φ מקבלת ולכן התנאי מתקבל. φ לא מקבלת ערכים שמתקרבים ל λ. λ כזה יהיה רגולרי

דוגמה ל λ עם ערך סינגולרי:



λ שייך לספקטרום (לא ערך רגולרי) $\Leftarrow$

φ מקבלת ערכים שהולכים וקרבים ל λ $\rightarrow$ פונ' זו לא תהיה חסומה $\frac{1}{\varphi(t)-\lambda}$



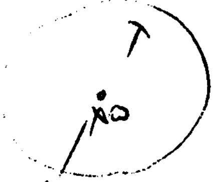
שייך λ שהוא לא ע"ע אך גם לא ערך רגולרי, שייכות = לקבוצת ספקטרום רציף

רמת תונה פונ' בשרטוט ונשאל: מה הע"ע מה הספקט' שייך הרגולרי

משפט: spec(A) תמיד קבוצה סגורה

הוכחה: נראה שאוסף הערכים הרגולריים הוא קבוצה פתוחה

ניקח λ_0 = ערך רגולרי. נראה שאם λ קרוב ל λ_0 אז זה גם יהיה ערך רגולרי



נרשום: האופרטור הזה מוגדר היטב

$$A-\lambda I = A-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I = (A-\lambda_0 I)\left[I-(\lambda-\lambda_0)\cdot R_{\lambda_0}\right]$$

הפונקציה הפיכה

$$\|R_\lambda\| = \sup_n \left| \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \right| \le$$

נדרוש שיהיה חסום

אומרים ה-λ_n-ים והיו מרוחקים מה-λ משמעותית

נאמר

$$\forall k,\quad |\lambda_k - \lambda| > \varepsilon = \varepsilon(\lambda)$$

שהו לכל k

אם קיים כזה ε אז האופרטור יהיה מוגדר היטב.

• איך קוראים למספר שמקיים את התנאי הזה?

$\forall k \quad \lambda \notin \text{clos}(\lambda_n)$ הסגור

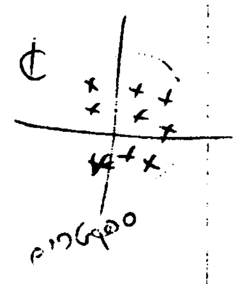
~~זה אומר ש λ לא יהיה בסגור~~

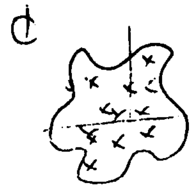
λ לא יהיה בסגור

$$\text{Spec}(A) =$$

$$\forall k \quad |\lambda_k - \lambda| > \varepsilon = \varepsilon(\lambda)$$

$$\boxed{\text{Spec}(A) = \text{clos}\{\lambda_n\}}$$

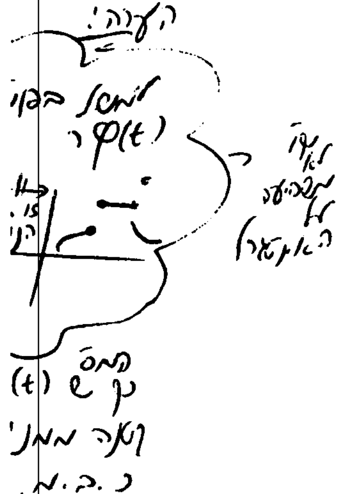




34 $L^2[0,1]$ דוגמה 5

$$A: f(t) \mapsto \varphi(t)\cdot f(t)$$

$$\|A\| = \text{ess sup}|\varphi(t)|$$



הערה: למשל בבוי $\varphi(t)$ לא משפיע על האופרטור

(i) מהם הע"ע?

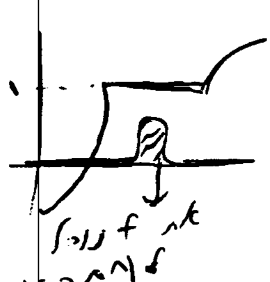
נניח שקיים

$$\exists f\neq 0 : Af = \lambda f$$

$$\varphi(t)\cdot f(t) = \lambda\cdot f(t)$$

$$(\varphi(t)-\lambda)\cdot f(t) = 0$$

אפשרות



את f נגדיר

(ii) נשאר לחקור שאלות הספקטרום

נביט ב

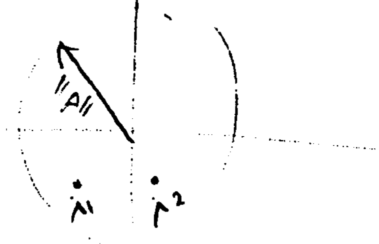
$$Af = \lambda f + g$$

$$\varphi(t) f(t) = \lambda f(t) + g(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\varphi(t)-\lambda}\cdot g(t)$$

g נתונה ויש לבדוק מהי f

כל $\lambda \in \mathbb{C}$ שמחוץ לרדיוס זה הוא ערך רגולרי: כלומר הספקטרום נמצא בתוך העיגול ויכול להיות גם על השפה שלו



מי דווקא בספקטרום? הע״ע הן נקודות בספקטרום.

האם אלו כל הספקטרום? או שקיימות עוד נקודות ספקטרום, חוץ מהן?

ננסה להבין זאת;

נניח $\lambda \in \mathbb{C}$ אינו ע״ע.

$\lambda \overset{?}{\in} spec(A)$

$(A-\lambda I)f=g$ נרצה להראות שלכל g קיים f שפותר את המשוואה! רציף!

את g, f ניתן לרשום כ $\sum$

$$f=\sum_1^\infty c_k \cdot e_k$$

$$g=\sum_1^\infty d_k \cdot e_k$$

מה הקשר בין המקדמים של f ושל g.

$(A-\lambda I)f=g$

$$\underbrace{\sum_1^\infty \lambda_k c_k e_k}_{Af} - \lambda \underbrace{\sum_1^\infty c_k e_k}_{f} = \underbrace{\sum_1^\infty d_k e_k}_{g}$$

אם יש שוויון, אז על המקדמים להיות שווים. נביט במקדם ה-k של כל אחד

לכן:

$c_k(\lambda_k-\lambda)=d_k$ לכל k $\forall k=1,2,\dots$

יש למצוא את ה-c_k-ים

$$c_k=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\cdot d_k$$

המכנה שונה מ-0 כי אמרנו ש λ אינו ע״ע כלומר לא שווה לאף אחד מה-λ האלו.

$$R_\lambda : g=\sum_1^\infty d_k e_k \longmapsto f=\sum_1^\infty \frac{d_k}{\lambda_k-\lambda} e_k$$

גם זה אופרטור אלכסוני, כי לוקח טור ומכפיל אותו באיזשהו מספר.

מה יש לדרוש ממנו כדי שיהיה חסום? שהמספרים באלכסון יהיו חסומים, כלומר נדרוש ש

כעת נעבור לספקטרום
(ערכים שהם לא רגולריים)

הגדרה:
$Spec(A)=\{\lambda\in\mathbb{C} : \lambda$ אינו רגולרי$\}$

נניח יש $f\neq 0$ ע"ע
$Af=\lambda f$ ← שמתקיים מכפול f האופרטור
אולי קיים ע"ע, אז ניתן לרשום זאת כך
$(A-\lambda I)f=0$
האופרטור פועל על איבר $f\neq 0$ ומאפס. זה אופרטור לא חח"ע
$A-\lambda I$ לא חח"ע
ולכן לא הפיך
כלומר λ אינו ערך רגולרי
$\lambda\in spec(A)$

λ נקרא ע"ע אם קיים $f\neq 0$ שמקיים $Af=\lambda f$

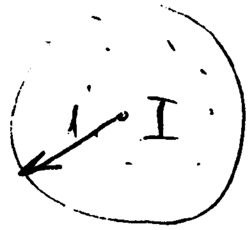
דוגמאות:
$\{\lambda_n\}$ סדרת מספרים

33 ① H, $\{e_n\}$ בסיס א"נ
$\{\lambda_n\}$ סדרה חסומה, $|\lambda_n|\le k$
נדרוש: $A: e_n\to\lambda_n e_n$
(כמו לדבר שה e_n הוא וקטור עצמי)

על האופרטור הזה להיות מוגדר על כל המרחב. אופרטור כללי המרחב:
$$A: f=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k c_k e_k$$
ומגדיר
אנחנו דורשים שטור זה יהיה מוגדר. ידוע ש c_k ב l_2
ולכן נדרוש שגם λ_k יהיה חסום ($|\lambda_n|\le k$)

ראינו בעבר ש
$$\|A\|=\sup_n|\lambda_n|$$
הנורמה שלו יהיה ה sup של כל ה λ-ות האלו
וניתן לייצג כמטריצה
$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ \vdots & & & \ddots\end{pmatrix}$$

$\sigma_p(X)$



כדור פתוח ←

$\{B : \|B-I\| < 1\}$

אנחנו בתוך הכדור

↓

איברי הכדור

ספקטרום של אופרטור

$A : X \to X$ ($\mathbb{C}$)

הגדרה: $\lambda \in \mathbb{C}$ מרוכב שהוא ערך רגולרי של האופרטור A, אם $A-\lambda I$ הפיך.

אם נביט במשוואה $(A-\lambda I)f = g$ כאשר האיבר g נתון, ונחפש את f

=ה להתקיים שלכל g קיים ויחיד f, שפותר את המשוואה, כך שהדבר הזה מתפים להמיפוי ששולח את g ל f צריך להיות חסום (אורז.ח)

$$Af - \lambda f = g$$

$$Af = \lambda f + g$$

משפט: כל λ כך ש: $|\lambda| \geq \|A\|$ הוא ערך רגולרי:

$\lambda \neq 0$ כי צריך לחלק בו

הוכחה: $A-\lambda I = (-\lambda)\cdot\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)$

$\Downarrow$

$\|\cdot\| < 1$

כך הוכחנו (לפי המשפט הקודם) ש: $(A-\lambda I)^{-1}$

$$(A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} =$$

ובנוסף למדנו פיתוח לטור כך ש...

$$= \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \frac{A^3}{\lambda^3} + \dots\right)$$

את האופרטור ניתן להביע ע"י הטור הנ"ל

נסמן את האופרטור

$$\boxed{R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}}$$

וזה נקרא רזולבנטה

האופרטור הזה פותר את המשוו

<u>משפט:</u> $A: X \to X$ $\|A\| < 1$ אזי $I-A$ אופרטור הפיך

הרעיון הוא: שאם a הוא מספר שבערכו המוחלט קטן מ-1 אז נוכל להביט בהופכי

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

זה נכון למספרים

אם לוקחים את האופרטור ההפיכים ומוסיפים לו משהו קטן (שבנורמה קטן מ-1) מקבלים גם כן $\mathcal{O}_p(X)$

נביט בכדור ברדיוס 1

I

1

הטענה: כל אופרטור בכדור הוא הפיך

<u>הוכחה:</u> נראה שהטור

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

מתכנס (בנורמה)

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} A^k$$

$A^3 = A \cdot A \cdot A$

$$\|S_m - S_n\| = \left\|\sum_{n+1}^{m} A^k\right\| \le$$

$(m>n)$

$$\le \sum_{k=n+1}^{m} \|A^k\| \le \sum_{n+1}^{m} \underbrace{\|A\|^k}_{\text{1-מ קטן}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} \infty$$

זהו זנב הטור

מעתה, $\Downarrow$

נגדיר B: $B := I + A + A^2 + \dots$

B כסכום $I+A+A^2+\dots$

נראה ש:

$$(I-A)B = B(I-A) = I$$

$$(I-A)S_N = I + A + A^2 + \dots + A^N - A(I + A + A^2 + \dots + A^N)$$

$$= I + A + A^2 + \dots + A^N - (A + A^2 + \dots + A^{N+1})$$

$$= I - \underbrace{A^{N+1}}_{\text{שואף ל-0}} \to I$$

$\Downarrow$

בנורמה שלו

$$\|\cdot\| \le \|A\|^{N+1} \to 0$$

אז הראנו בסה״כ

$$(I-A) \cdot S_N \to I.$$

$\downarrow$

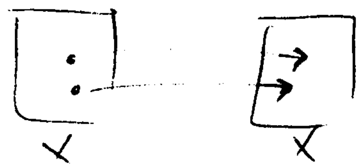
$$(I-A) \cdot B = I$$

ובאופן דומה, גם

$$B(I-A) = I$$

לסיכום, יש לדרוש את 2 התנאים
$AB=BA=I$

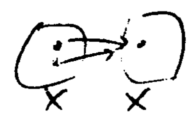
נביט ב-2 המרחבים



תנאי 1: $BA=I$ → זהו אופרטור חח"ע

אם ניקח x
נפעיל עליו את A
ואחר כך את B
ונקבל את I

דוגמא:



זה לא יקרה
$BA=I$

תנאי 2: $AB=I$ → כלומר זהו אופרטור על

ניקח איבר
נפעיל את B
ולאחר שהפעלנו
את A
נקבל את
אותו
האיבר

לסיכום:

$BA=I \Rightarrow$ A חח"ע

$AB=I \Rightarrow$ A על

$x \to Ax$

כאשר
אומרים
$\in C_p(X)$
הכוונה ש
חסום
$\in A^{-1}$

בנוסף

A הפיך $\Longleftrightarrow$ A חח"ע ועל
ו- $\|A^{-1}\|<\infty$
(כלומר B חסום)

הערה:
לפי משפט בנך
אם $A\in C_p(X)$ כאשר X מרחב שלם
ואם A חח"ע ועל
אז נובע כי A^{-1} חסום
(כלומר $\|A^{-1}\|<\infty$)

הערה: במקרה ש
$A:X\to Y$
$A^{-1}:Y\to X$
A חח"ע ועל וחסום
וההפיכה גם חסומה

ושפה אין צורך לזה

הערה
אופרטור I
הפיך
וההפכי לו הוא

אלגברה של אופרטורים: $O_p(X)$

$(A\cdot B)(f) := A(Bf)$ ⟵ הרכבה

לרוב נקרא זה מכפלה / הרכבה

טענה: $\|A\cdot B\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

זה אומר שפעולת הכפל רציפה ביחס לנורמה.

הוכחה:

$$\|ABf\| \underset{\text{הגדרה}}{=} \|A(Bf)\| \underset{Bf \text{ שפועל על } A}{\le} \|A\|\|Bf\| \underset{\text{כיון } B \text{ חסום}}{\le}$$

(כיון A חסום)

$$\le \|A\|\|B\|\cdot\|f\|$$

כלומר אופרטור ההרכבה חסום עם החסם הצר על הנורמה שלו.

תרגיל: הוכח שאם $A_n \to A$, $B_n \to B$ (בנורמה) אז $A_n\cdot B_n \to A\cdot B$

השתמש בטענה והראה שפעולת הכפל היא רציפה

(זה הכוונה לרציפות של פעולת הכפל) =

O_p זו אלגברה ויש בה פעולת חיבור וכפל.

(יש גם איבר ניטרלי ביחס לכפל (אופרטור הזהות I))

ברגע שיש את זה, נוכל להגדיר מהו אופרטור הפיך

הגדרה: $A \in O_p(X)$ הוא הפיך אם קיים $B\in O_p(X)$ כך ש: $AB=BA=I$

(זהו אופרטור שיש לו הופכי B, כך שגם נכפול אותם, נקבל את אופרטור הזהות)

במרחבים ממימד אינסופי (שלא כמו במרחבים סופיים באלגברה לינארית) לא מספיק להראות רק $AB=I$, יש להראות

$$AB=BA=I$$

נראה שלא מספיק כיוון אחד.

דוגמא נגדית:

$\ell^2 = \{x\},\ x=(x_1,x_2,x_3,\dots)$

$A: x \mapsto (0,x_1,x_2,x_3,\dots)$

$\|A\|=1$

$B: y \mapsto (y_2,y_3,y_4,\dots)$

$\|B\|=1$

$BAx=x$	$ABx=(0,x_2,x_3,x_4,\dots)$
$BA=I$	$AB\neq I$

$\|I - S_M\|_{op} = 1$ נסביר.

זהו הצנה שנשאר מ $f - S_M$

וזהו היטל על $E_M^{\perp}$ (מאונך)

כל אופרטור הטל הוא מנורמה 1

כל אובר ניתן לרשום כאובר ועוד אובר מהניצב

$$f = S_M f + (f - S_M f)$$

$\in E_M$ $\quad$ $\in E_M^{\perp}$

$S_M f$

לסיכום יש התכנסות נקודתית

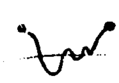
אבל אין התכנסות בנורמה.

תרגיל: נביט במרחב C על המעגל או L_2 על המעגל

$$C(\mathbb{T}),\ L^2(\mathbb{T})$$

אלו פונקציות מחזוריות אשר מתלכדות בנקודות הקצה (כיוון שהן מחזוריות, נחשוב עליהן כעל על מעגל)

[ד-ה״ו]



$$A_n : f(t) \longmapsto f(t - \tfrac{1}{n})$$

אופרטור הזזה. לוקח את הגרף ומזיז אותו.

אופרטור זה מזיז ממש במעגל ($\frac{1}{n}$)

יש לחקור התכנסות נקודתית, בנורמה, למה מתכנס?

הערה $L^2(\mathbb{T})$: מרחב ההשלמה של $C_0(\mathbb{T})$ שהרציפות עם נורמה אינטגרלית (אינטגרל בר)

התכנסות נקודתית שקולה להתכנסות במ״ש

הערה:

<u>התכנסויות:</u> (אקש מתכנסים)

① $\|A_n - A\| \to 0$ התכנסות בנורמה

② $\forall f: A_n f \to A f \quad \forall f \in X$ התכנסות נקודתית

התכנסות בנורמה חזקה יותר. אם יש התכנסות בנורמה, אז יש התכנסות נקודתית

<u>דוגמה:</u> מרחב הילברט H (מרחב שלם עם מ"פ) ובסיס אורתונורמלי $\{e_n\}$ (מערכת שהיא אורתונורמלית ושלמה)

למדנו שכל וקטור ניתן לרשום כטור

$$\forall f: f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

טור זה מתכנס במובן של <u>נורמה</u>

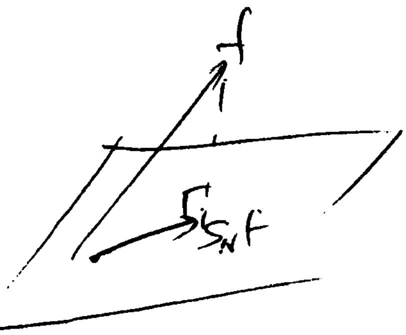
← כלומר אם ניקח את הסכומים החלקיים אז זו תהיה סדרה שמתכנסת בנורמה לאיבר הגבולי

$$\underset{\text{נסמן}}{S_N f} = \sum_{k=1}^{N} \cdots \longrightarrow f$$

ניתן להסתכל עליו כאופרטור שלוקח את f ל $S_N f$

$$S_N : f \longmapsto S_N f$$

מה עושה אופרטור זה במובן גיאומטרי? זה אופרטור שקראנו לו הטלה



והוא הקירוב הטוב ביותר במרחב שקראנו E_N שנפרש ע"י N הוקטורים הראשונים מהמערכת שלנו

$$S_N : H \to E_N$$

<u>הטלה</u>

בדרך זו מקבלים סדרה של אופרטורים $\{S_N\}$. מה ניתן לומר על התכנסות שלהם. כאשר N הולך וגדל

$$S_N \to ?$$

אמרנו שהסכומים החלקיים מתכנסים ל-f ולכן האופרטור שמתכנס את f זהו אופרטור הזהות (I)

$$S_N \to I$$

האם יש התכנסות בנורמה?

$$\|S_N - I\|_{op} \xrightarrow{?} 0$$

האם שואף ל-0?

כעת יש להראות התכנסות בנורמה של האופרטורים.
עבור ε ונראה שהאיברים הינו קרובים עד כדי ε.

$$\exists N: \|A_n - A_m\| < \varepsilon, \quad \forall n,m > N$$

נשתמש בתנאי קושי על הסדרה A_n

וכעת, אם נפעל באות על הפונקציה

$$\|A_n f - A_m f\| \le \varepsilon \|f\|$$

וכעת ניתן ל-m לשאוף ל-∞
(זה מתקיים לכל m)

$$\|A_n f - Af\| \le \varepsilon \|f\|$$

וזה נכון לכל f ולכן

$$\|A_n - A\| \le \varepsilon, \quad \forall n > N$$

ובזה הראנו כי יש התכנסות בנורמה של האופרטורים.

~~קודם הראנו שמתכנס ל-A~~
והוא ~~איבר של המרחב~~
ויש התכנסות בנורמה של
המרחב

שרוצים
להראות שזהו
מרחב שלם,
נחוץ מספיק
קושי + *

זהו מטוב
שחזר על עצמו

הערה:

נשים לב. אילו הינו מדברים על אופרטורים.
אם הינו מגדירים מרחב
$Op(X \to Y)$
אופרטורים ממרחב X למרחב Y
(קודם פעלו מהמרחב לעצמו)

השאלה מי צריך להיות שלם?
מה שחשוב זה שה-Y יהיה שלם.
אם Y שלם, אזי $Op(X \to Y)$
מרחב שלם
(השלמות של X כאן הוא לא חשובה)

ההוכחה מתבצעת באותו אופן
שעשינו קודם.

לכן, X^* תמיד שלם
כי

$$X^* = Op(X \to \mathbb{C})$$
$\mathbb{R}$

המרחב
הצמוד,
המרחב הדו[אלי]
שהם מ...
את מרחב
הפונקציונלים

שיעור:

אלגברה של אופרטורים

$X, \|\cdot\|$ מרחב שלם (= בנך)

$Op(X) = \{ A : A: X \to X \}$
A חסום

$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) f = \lambda_1 A_1 f + \lambda_2 A_2 f$

$$\|A\|_{op} = \sup_{0 \neq f \in X} \frac{\|Af\|}{\|f\|}$$

משפט: $Op(X)$ מרחב שלם.

הוכחה: $\{A_n\}$ סדרת קושי,

$\exists A: \|A_n - A\| \to 0$ $(n,m \to \infty)$

יש לבנות אופרטור, שהוא יהיה הגבול

וצריך לומר מה הוא עושה לכל

איבר של המרחב, כלומר מהו Af

נראה $\{A_n f\}$ מקיימת קושי כלומר;

יהי $f \in X$: $Af = ?$

$\{A_n f\}$ $\|A_n f - A_m f\|_X = \|(A_n - A_m) f\|$

$\leq \|(A_n - A_m)\|_{op} \cdot \|f\|_X \to 0$ $(n,m \to \infty)$

על החסום בגלל ע"י נורמת האופרטור כפול נורמה של המרחב X

X שלם ולכן $A_n f$ מתכנס ל Af

לפי הגדרה (נגדיר את Af להיות הגבול הזה)

$A_n f \xrightarrow[n \to \infty]{\text{הגדרה}} Af$

29 הגדרנו מיפוי, המעבר לכל $A_n f$ את

① ליניאריות ברורה כי כל A_n ליניארי,
ולכן גם גבולם ליניארי.
מסיקה A ליניארי

② כעת נראה האופרטור חסום
כלומר שייך למרחב $A \in Op(X)$

③ יש להראות שיש התכנסות (לא רק
נקודתית) אלא בנורמת האופרטור.

$\|A_n - A\|_{op} \to 0$

לגבי ② למה A חסום, מה יהיה
החסם לנורמה? כיוון ש
$\|A_n\| \leq k$

כולם חסומים ע"י k (קבוע, כי סדרת
קושי תמיד גם חסומה)

ולגבי
$\|A_n f\| \leq k \|f\|$
↓
חסם לנורמה

$n \to \infty$ ולכן

$\|Af\| \leq k \|f\|$

וזה נכון לכל f, וזה מראה
שנורמת A חסומה ע"י k אז הנה
כלומר יהיה חסם לנורמה של
האופרטור הגבול:

$\|A\| \leq k$

$$= \iint_{I\times I} |k(t,s)|^2\,dt\,ds \cdot \|f\|^2$$

$$\underbrace{\iint_{I\times I} |k(t,s)|^2\,dt\,ds}_{\gamma^2}$$

שנקרא לזה γ^2

אז שצא
אופרטור
אינטגרלי.

$$\|Jf\| \leq \gamma \cdot \|f\|$$

$$\|J\| \leq \sqrt{\iint_{I\times I} |k(t,s)|^2\,dt\,ds}$$

האם יש שוויון? הפעם זה לא נכון!

<u>תרגיל:</u> להוכיח כי במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

$\left(L^2(\mathbb{T})\right.$ או, מעגל$\left.\right)$

$$k(t,s) = \cos(t-s)$$

להראות:

$$\|J\| < \sqrt{\quad}$$

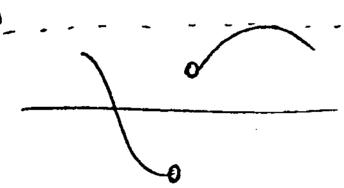
ולא שווה $\neq$

הערה לגבי מרחב L^2:

ה-λ לא צריכה להיות רציפה בהכרח. אלא $\lambda \in L^\infty(I)$

הסבר: נביט בפונק' רציפה למקוטעין

הנורמה! של תהיה



$\lambda(t)$

מהי נורמת האופרטור המתאים?

$$\|Af\|^2 = \int_I |\lambda(t)\cdot f(t)|^2 dt$$

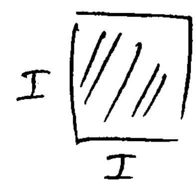
$$\gamma = \text{essential sup}|\lambda(t)|$$

נרצה ש- $|\lambda(t)| \le \gamma$ כמעט בכל מקום.

אופרטור אינטגרלי $L^2(I)$

$K(t,s) \in C(I\times I)$

פונק' של 2 משתנים שרציפה בריבוע הזה



$$(J_f)(s) = \int_I k(t,s)\, f(t)\, dt$$

אופרטור שסומן באות J ומוגדר ב-L^2

ה-k נקרא הגרעין (kernel) של האופרטור.

אופרטור אינטגרלי עם גרעין!!...

ננסה להבין את הנורמה שלו

$$(Jf)(s) =: y(s)$$

$$\cancel{\|y(s)\|^2 = \int_I \left[\int_I k(t,s) f(t)\, dt\right]^2}$$

$$= \int_I \left[\left|\int_I k(t,s) f(t)\, dt\right|^2\right] ds$$

נשתמש בקושי שוורץ ונשווה על האינטגרל הפנימי

$$\le \int_I \left[\int_I |k(t,s)|^2 dt \cdot \int_I |f(t)|^2 dt\right] ds$$

זו פונק' של s

זו לא פונק' של s → שווה $\|f\|^2$ זה קבוע ולכן ניתן להוציא החוצה

$$= \underbrace{\int_I \left[\int_I |k(t,s)|^2 dt\right] ds}_{} \cdot \|f\|^2$$

אינטגרל משתנה כאשר יש שני משתנים משפט פוביני

$$= \iint_{I\times I} |k(t,s)|^2 dt\, ds \cdot \|f\|^2$$

זה דומה לכפל מטריצה בוקטור ולקבל וקטור!!

27 עבדנו במרחב C_2. הגדרנו A רק על מרחב C_2. איך נרחיב לכל מרחב L^2?

כפי שעשינו קודם:

אם יש פונק' f ב L^2 נקרב אליה ע"י פונקציות ב C_2

$$C_2 \ni \varphi_n \longrightarrow f \in L^2$$

$$Af := \lim_{n\to\infty} A\varphi_n$$

למה ס.ז מתכנסת?

$$\|A\varphi_n - A\varphi_m\| = \|A(\varphi_n-\varphi_m)\| \le$$

$$\le \gamma \cdot \|\varphi_n - \varphi_m\| \longrightarrow 0 \quad (m,n\to\infty)$$

כלומר זו (סדרה) קושי. ולכן נוכל להגדיר

$$Af := \lim_{n\to\infty} A\varphi_n$$

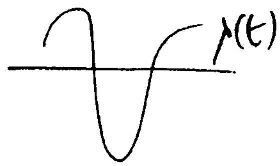
וגם הנורמה תישמר

$$\|Af\| \le \gamma \|f\|$$

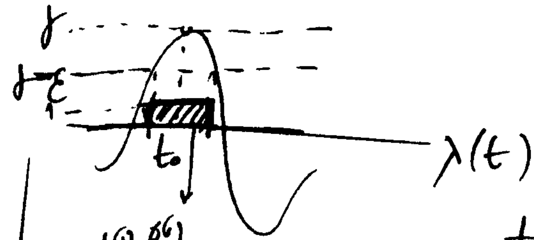
הראינו ס. קושי. איך נדע שהיא מתכנסת? מסתמכים על L^2 שהוא ההשלמה של C_2 ולכן מרחב שלם.

2 שוב נשאל (ואם יש שוויון)

הפעם לא ניקח $f\equiv 1$



ה-f כולה מרוכזת ליד ה-max



מעט קטן שראופוף f_ε

נניח ב t_0 יש max

שכן

$$\|Af_\varepsilon\|^2 = \int_{O(t_0)} |\lambda(t)\cdot f_\varepsilon(t)|^2 dt \ge$$

הקטע הקטן, סביב הנקודה t_0

$$\ge (\gamma-\varepsilon)^2 \underbrace{\int_{O(t_0)} |f_\varepsilon(t)|^2 dt}_{=\|f_\varepsilon\|^2}$$

ולכן

$$\|Af_\varepsilon\| \ge (\gamma-\varepsilon)\cdot\|f_\varepsilon\|$$

ε קטן כרצוננו זה מראה ש.. $\|A\| = \gamma$

דוגמה:

בקטע I λ הפונ' רציפה

$$\lambda(t) \in C(I)$$

אופרטור A: $C(I) \longrightarrow C(I)$

שולח פונ' $f(t)$ ל $f(t)\cdot\lambda(t)$

$$f(t) \longrightarrow \underbrace{f(t)\cdot\lambda(t)}_{\text{מחזיר גם רציפה}}$$

$$\|\lambda(t)f(t)\| = \max_{t\in I} |\lambda(t)|\cdot|f(t)| \le \max_{t\in I}|\lambda(t)|\cdot\max_{t\in I}|f(t)|$$

יש לחסום בעזרת נורמת f

$$\underbrace{\max_{t\in I}|\lambda(t)|}_{\gamma}\cdot\underbrace{\max_{t\in I}|f(t)|}_{\|f\|}$$

כלומר

$$\|Af\| \le \gamma\|f\|$$

$$\|A\| \le \gamma$$

איזו פונ' ניקח כדי להראות שוויון?
ניקח f ונבחר להיות שווה ל-1

$f \equiv 1$ ואז

$$\|Af\| = \|\lambda\| = \gamma = \gamma(f)$$

$$\boxed{\|A\| = \gamma}$$

⇐ אופרטור A הנ"ל חסום והנורמה שלו שווה ל max של $\lambda(t)$

דוגמה:

נביט באותו האופרטור אך במרחב אחר.

$$X = Y = L^2(I)$$

f רציפה

$$f \xmapsto{A} \lambda(t)f(t)$$

⇐ נביט ב C_2 (משוכנת ב L^2 והיא) קבוצה צפופה. $C_2 \subset L^2$.

מה ניתן לומר על

$$\|\lambda f\|^2 = \int_I |\lambda(t)\cdot f(t)|^2 dt \le$$

$$\le \left[\max_{t\in I}|\lambda(t)|\right]^2\cdot\int_I |f(t)|^2 dt$$

λ רציפה וחסומה ולכן ניתן להוציא את ה-max

זה שווה לנורמת f^2

$$\|Af\| \le \gamma\cdot\|f\|$$

$$\gamma = \max_{t\in I}|\lambda(t)|$$

כלומר

$$\|A\| \le \gamma$$

וקבלנו את מסקנה למרות ששינינו את המרחב?

גם כאן יש נורמה:

$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

נורמה זו יכולה להיות סופית או אינסופית.

משפט: אם A רציף בנק' $x_0=0$ אזי $\|A\|<\infty$

אם $\|A\|<\infty$ אזי A רציף בכל נק' X

(הוכחה בדיוק כפי שהוכחנו בפונקציונליים)

<u>דוגמה:</u> $\{e_n\}$ בסיס אורתונורמלי, H

בסיס אורתונורמלי, זו מערכת אורתונורמלית ושלמה (כלומר ה-span צפוף)

$\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}$, $x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$

A:

$$Ax=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\cdot c_k\cdot e_k$$

בבסיס כזה לא אוכל להציג כל וקטור כטור שמתכנס.

המקדמים c_k הם ב-l_2 (אי שוויון בסל)

כדי שטור זה יתכנס המקדמים חייבים להיות ב-l_2 (תמיד)

ולכן נרצה לדעת ש:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty \overset{?}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k c_k|^2<\infty$$

נרצה שזה יה' נכון לכל סדרה k

$\gamma:=\sup_n|\lambda_n|<\infty \Leftarrow$ מספיק להראות

<u>תרגיל:</u> נוכיח שאם תנאים אלו מתקיימים אז A מוגדר

A רציף

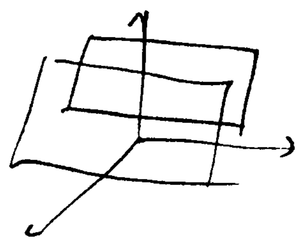
$\gamma=\|A\|$

<u>תרגיל:</u> אם (λ_n) לא חסומה, אזי קיים x שהטור לא מתכנס.

(כלומר החסימות הוא תנאי הכרחי)

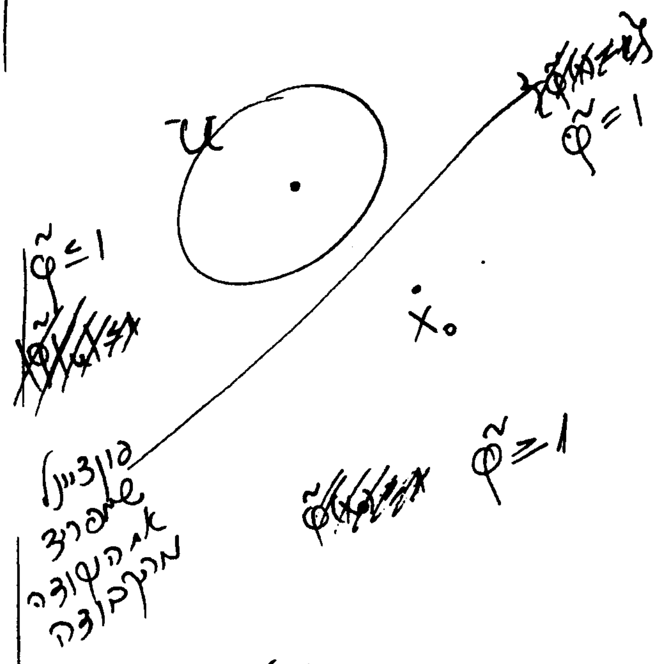
חסימות למדה $\Leftarrow$ חסימות האופרטור

והן



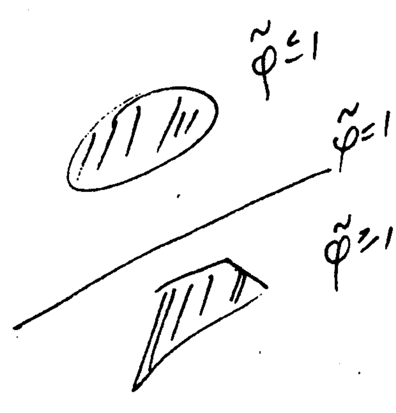
אם במקום ס נעבוד C, תהיה שם הצבה. נרחיב את רעיון זה למרחבים כלליים יותר.

בתרגיל שלנו:



U לא בהכרח כדור. הוא יכול להיות גם קמורה. ברגע שבו קבוצה קמורה ויש x_0 מחוץ לקבוצה.

למשל



למשל

לא קמורה

ניתן להוכיח כי אם יש מרחב לינארי ונורמי $(X, \|\cdot\|)$

! U פתוחה וקמורה

V קמורה

U,V זרות. $\Leftarrow$ אזי ניתן להפריד.

(זה אחד השימושים הגדולים של משפט הן בנך)

להפריד, הכוונה שקיים פונקציונל שמפריד בין חלק שבו U וחלק V

סיימנו עם נושא הפונקציונליים

$\boxed{\text{אופרטורים}}$

X, Y מרחבים נורמים. כל אחד נורמה אחרת.

$(X, \|\cdot\|_X)$

$(Y, \|\cdot\|_Y)$

$A: X \to Y$

לינארי

הפעם נעתיק X לא למרחב הסקלרים אלא למרחב אחר.

(פונקציונל זה מקרה פרטי של אופרטורים. Y יהיה מרחב הסקלרים. כאשר Y הוא מרחב חד מימדי.)

ש אורתוגונליות ומקרים

$(p=1\ ;\ 1<p<\infty\ ,\ p=\infty)$

במובן זה, איך נקרב את הוקטור הבא:
$(1,0,0,\dots)$

(ניתן הכי לקרב כל וקטור במרחב)

(שאלה זו קשורה למשפט הן-בנך)

=

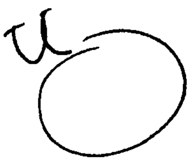
מע' אורתו' היא שלמה אמ"ם לא ניתן להוס' וקטור שמאונך לכולם

וניתן לומר אמ"ם לא ניתן למצוא פונקציונל שמתאפס על כל אברי המערכת

<u>דוגמה לשימוש:</u> $X, \|\cdot\|$

$u = \{x : \|x\| \le 1\}$

U



x_0 נוח מחוץ לכדור

$\varphi(\lambda x_0) := \lambda \cdot \|x_0\|$

$\in \mathrm{span}\{x_0\}$

הנורמה שלו זה $\|\lambda \cdot x_0\|$

ניתן לומר

$Y := \mathrm{span}\{x_0\}$

$\|\varphi\|_{Y^*} = 1$

ומשפט הן-בנך אומר שניתן להרחיב את פונקציונל זה לכל המרחב

25

$\tilde{\varphi} \in X^*\ ,\ \|\tilde{\varphi}\| = 1$

$\tilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\| \geq 1$

כי הוא הרחבה

x_0 מחוץ לכדור

ומצד שני כיוון שהנורמה שווה ל-1 זה אומר ש-φ על הכדור U

$\left| \tilde{\varphi}|_u \right| \le 1$

ערכי φ על הכדור קטנים שווים 1 זה מהגדרת הנורמה $\sup\|\ \|$

לסכם:

$\tilde{\varphi}(x_0) \geq 1$

$\left| \tilde{\varphi}|_u \right| \le 1$

זה פונק' שמפריד את הנקודה מהקבוצה

הערה: נביט ב-$\mathbb{R}^3$. איך נראה פונק' $\varphi(x)$

$\varphi(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$

$\{x : \varphi(x) = c\}$

אם נביט ב $\varphi(x) = 0$

$X_0 \ni x_n \to x$

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

למה זה מוגדר? למה הגבול קיים?

כי זה שזו סדרת קושי.

$$|\varphi(x_n)-\varphi(x_m)| \le \gamma \cdot \|x_n - x_m\| \to 0$$

ולכן הגבול קיים ← אז 0. מתכנסת

($n,m\to\infty$)

(יש להראות שאין תלות בסדרה שמתכנסת!)

כעת: $|\varphi(x_n)| \le \gamma\|x_n\|$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$|\varphi(x)| \le \gamma\|x\|$ נשתמש ברציפות הנורמה

את ה-ξ בוחרים באופן כזה שיתן תת מרחב לינארי וצפוף ולבסוף מרחיבים לסגור ע"י הבעיה האחרונה ששינינו.

הוכחה זו מתאימה כאשר המרחב ספרבילי.

(הערה: אם המרחב אינו ספרבילי ניתן להשתמש בלמה של צורן)

תרגיל: הוכיחו כי אם $Y\subset X$ תת לינ' (Y תת מרחב לינארי של X)

ואם Y לא צפוף ב-X אזי קיים פונק' φ לא חסום. לא שווה זהותית לאפס ומתאפס על Y

נסמן: $Y\subset X$ תת לינ'

$$\exists \varphi\in X^*,\ \varphi\neq 0,\ \varphi|_Y \equiv 0$$

רמז: (חשוב ש-Y לא צפוף ב-X. כי Y אם היה צפוף ולכן φ מתאפס על Y והוא צריך להתאפס על הסגור. והסגור לא יכול להיות כל המרחב)

תרגיל: במרחב ℓ^p נסתכל במע'

$(1,1,0,0,0\dots)$

$(0,1,1,0,0,0\dots)$

$(0,0,1,1,0,\dots)$

מע' אינסופי. של וקטורים במרחב ℓ^p

האם המערכת שלמה?

מערכת שלמה: ה-span שלה צפוף

כל וקטור במרחב ניתן לקרב ע"י קומבינציות לינאריות סופיות של המערכת.

למשל $(1,x,x^2\dots)$ מערכת שלמה כי ה-span זה כל הפולינומים

במילים אחרות, יש קבוצה A של מספרים a קטן וקבוצה B של מספרים b קטן

$$A=\{a\} \quad B=\{b\}$$

$$\exists ?\, c \qquad a\le c\le b$$

מתי אפשר לבחור c כאשר זה מתקיים? בכך שה sup של A יהיה קטן שווה מה inf של B

$$\sup A \le \inf B \Rightarrow \forall a\in A,\ \forall b\in B$$

זה שקול לכך ש:

$$\forall a, \forall b \rightarrow a\le b$$

(כל איבר של a קטן או שווה לכל איבר של b)

כאמור נוכיח: (משהו יותר רחב מהראשון)

$$-\varphi(y_1)-\gamma\|y_1+\xi\| \le -\varphi(y_2)+\gamma\|y_2+\xi\|$$

$$\varphi(y_2-y_1) \overset{?}{\le} \gamma\left(\|y_2+\xi\|+\|y_1+\xi\|\right)$$

כעת

$$\varphi(y_2-y_1) \overset{*}{\le} \gamma\|y_2-y_1\| = \gamma\|(y_2+\xi)-(y_1+\xi)\|$$

$$\le \gamma\left(\|y_2+\xi\|+\|y_1+\xi\|\right)$$

פעולה של φ תמיד קטנה מ נורמה של φ ($\gamma=\|\varphi\|$) כפול הנורמה.

24

$$|\varphi(x)| \le \|\varphi\|\cdot\|x\|$$

* הסבר

המס הכי קטן שמקיים את האי השוויון הזה

הצלחנו להרחיב ל-φ_1. אם צריך את המרחב את סיימנו. נרצה, אחרת, להמשיך את התהליך הזה

נניח X ספרבילי

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ קבוצה צפופה

$$\mathrm{span}(\varphi, \xi_1, \xi_2, \dots) =: X_0$$

שווה למרחב

לאחר כל ההרחבות האלו, קיבל

$$\tilde{\varphi} : X_0 \to \mathbb{R}$$

לאורך כל הזמן נוודא שהנורמה לא משתנה לא גדלה.

נרחיב לסגור ונעשה זאת לפי רציפות. ניקח איבר במרחב ונגדיר עליו את הפונקציה. איבר במרחב שקרב ע״י סדרה מה X_0 הזה. נסמן:

$$X_0 \ni x_n \to x$$

נסמן ב x_n סדרת איברים

נשים לב X_0 תת מרחב צפוף.

$\forall y\in Y: \ |\varphi(y)| \le \gamma\|y\|$

כעת נרצה לבחון איך נראה האיבר ב- Y ; נרצה למצוא מהו $\varphi(\xi) = ?$

$$y+\underbrace{\lambda}_{\text{סקלר}}\xi$$

נרצה לדעת מה יהיה ה- φ של האיבר הזה (ההרחבה)

העדרו ההרחבה היא ליניארית ולכן

$$\varphi(y+\lambda\xi) = \varphi(y) + \lambda\cdot\underbrace{\varphi(\xi)}_{?}$$

נרצה לעשות זאת מבלי להגדיל את הנורמה. ולכן הדרישה:

$$* \quad \varphi(y+\lambda\xi) \overset{?}{\le} \gamma\|y+\lambda\xi\| \quad \forall y\in Y, t$$

נרשום את אי השוויון בצורה הבאה:

ראשית נפשט; נוציא λ החוצה מה האגפים ב- *

$$|\varphi(\lambda(\xi+\tfrac{y}{\lambda}))| \le \gamma\|\lambda(\xi+\tfrac{y}{\lambda})\|$$

מליניאריות נוציא את λ החוצה והומוגניות

$$|\lambda|\cdot|\varphi(\xi+\tfrac{y}{\lambda})| \le |\lambda|\cdot\gamma\|\xi+\tfrac{y}{\lambda}\|$$

נצמצם את λ

$$|\varphi(\xi+\tfrac{y}{\lambda})| \le \gamma\|\xi+\tfrac{y}{\lambda}\|$$

y תת מרחב ולכן $\frac{y}{\lambda}$ גם בתת מרחב ניתן לסמנו כ- y'

ולכן ניתן להוכיח

$$\boxed{|\varphi(\xi+y')| \le \gamma\|\xi+y'\|}$$

$\forall y'\in Y$

כעת נניח שהסקלרים ממשיים $\mathbb{R}$ (φ פונקציונל שמחזיר סקלרים ממש)

ונכתוב:

$$-\gamma\|\xi+y'\| \le \underbrace{\varphi(\xi+y')}_{\varphi(\xi)+\varphi(y')} \le \gamma\|\xi+y'\|$$

מליניאריות

כעת נוכל לרשום:

$$-\gamma\|\xi+y'\|-\varphi(y') \le \varphi(\xi) \le \gamma\|\xi+y'\|-\varphi(y')$$

וזה צריך להיות נכון לכל y'

כלומר זה המס' שצריך להגדיר האחרים ידועים מראש.

שעור
#16
השלמה
10-12
202
103

התכנסות חלשה

$$\varphi_n \xrightarrow{(w)} \varphi$$

אם: $\forall x : \varphi_n(x) \to \varphi(x)$

H מרחב הילברט

$\varphi_n(x) = \langle x, a_n \rangle$, $a_n \in H$

$\forall x \in H : \langle x, a_n \rangle \to \langle x, a \rangle$

$\|a_n - a\|_H \to 0$

$a_n \xrightarrow{(w)} a$

בפרט: (מקרה פרטי של משפט שהוכחנו)

אם $\{a_n\} \subset H$, $\|a_n\| \le K$

ו- H מרחב ספרבילי, אז

קיימת $\{a_{n_j}\}$ $a_{n_j} \xrightarrow{(w)} a \in H$

דוגמה: H , $\{e_n\}$ מע"א

$e_n \xrightarrow{(w)} 0$

$\forall x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \le \|x\|^2$

$\langle x, e_n \rangle \longrightarrow 0 = \langle x, 0 \rangle$

$\|e_n - e_m\|^2 = 2 \not\to 0$ $(n,m \to \infty)$

משפט Hahn-Banach

$X, \|\cdot\|$

$Y \subset X$ תמ׳ לינארי

$\varphi \in Y^*$, $\|\varphi\|_{Y^*} < \infty$

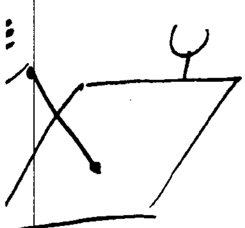
$\exists \tilde{\varphi} \in X^*$, $\tilde{\varphi}|_Y = \varphi$

הצמצום שלו ל Y הוא φ

והנורמה שלו כפונקציונל בכל x שווה לנורמה הפונק׳ של φ

$\|\tilde{\varphi}\|_{X^*} = \|\varphi\|_{Y^*}$ -!

הוכחה:



ניקח וקטור ξ: שלא נמצא ב Y

$\xi \notin Y$

נביט בתת מרחב Y_1 שנוצר מה Y שלנו ועוד וקטור נוסף שאינו שייך ל Y

$Y_1 = \mathrm{span}(Y, \xi)$

נסמן ב γ את הנורמה של φ כפונקציונל ב Y כלומר:

20.5.13

לאנשים!!

אנליזה מודרנית ב (6)

<u>משפט:</u> יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב ספרבילי, $\varphi_n \in X^*$ $\|\varphi_n\| \le K$

אזי קיימת תת סדרה $\{\varphi_{n_j}\}$ כך ש $\varphi_{n_j} \xrightarrow{(w^*)} \varphi$

<u>הוכחה</u>

תהי $\{y_1, y_2, \dots\}$ צפופה. נסתכל בסדרה הבאה $\{\varphi_n(y_1)\}$

זוהי סדרה חסומה כי $|\varphi_n(y_1)| \le \underbrace{\|\varphi_n\|}_{\le K} \cdot \|y_1\|$

$\Leftarrow$ קיימת תת סדרה $\{n_j^{(1)}\}$ כך ש $\exists \lim_{n \to \infty} \varphi_{n_j^{(1)}}(y_1)$

בשלב הבא נתבונן ב $\varphi_{n_j^{(1)}}(y_2)$

בסוף נקבל תת סדרה $\{n_j^{(j)}\}$ מתכנסת על כולם

על קבוצה צפופה $\Leftarrow$ התכנסות על קבוצה צפופה ביחד (

עם חסומה $\Leftarrow$ יש התכנסות חלשה

$$n_1^{(1)} < n_2^{(1)} < n_3^{(1)} < \dots$$
$$n_1^{(2)} < n_2^{(2)} < n_3^{(2)} < \dots$$
$$\vdots$$

והאלכסון הוא המתכנס

20.5.13

22

אנליזה ⓢ מודרנית 2

נשאר להבין את $\|S_N\| \le K$?

$$a(t)\ , \quad \varphi(f) = \int_{\mathbb{T}} a(t) f(t) \frac{dt}{2\pi}$$

$$\|\varphi\| = \int_{\mathbb{T}} |a(t)| \frac{dt}{2\pi}$$

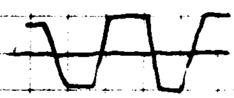
$\|f\| \le 1$

$$\|\varphi(f)\| \le \int_{\mathbb{T}} |a(t)| \frac{dt}{2\pi} \cdot \underbrace{\max_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|}_{1}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & a(t) \ge 0 \\ -1 & a(t) < 0 \end{cases}$$

אבל זה לא במרחב שלנו

נתקן אותה



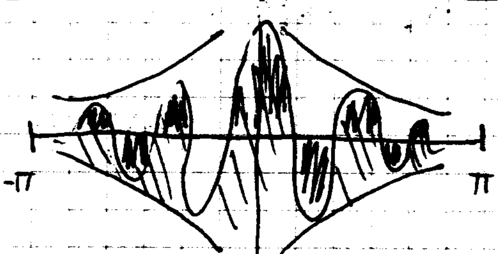
(קירוב רציף)

$$\|S_N\| = \int_{\mathbb{T}} |D_N(t)| \frac{dt}{2\pi}$$

$$D_N(t) = e^{-iNt}\left(1 + e^{it} + e^{2it} + \dots + e^{2Nit}\right)$$

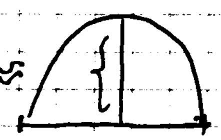
$$= e^{-iNt}\left(\frac{1 - e^{(2N+1)it}}{1 - e^{it}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{D_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}}$$



נתבונן בפונקציה קרובה ל-D ונחשב את השטח

$$\frac{\sin(Nt)}{\sin t}$$



$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{N}{K}$

$\frac{\pi K}{N}$ אפסים

$\frac{\pi(K+1)}{N}$ אפסים

$$\approx \frac{\pi}{N} \cdot \frac{N}{K} \approx \frac{1}{K}$$

$$\approx \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K} \approx \log N$$

יש בערך N שטחים כאלו ⇐

$$\Rightarrow \|S_N\| > c \cdot \log N$$

⇐ הנורמה לא חסומה

⇐ משפט בנך-שטיינהאוס אומר שאין התכנסות חלשה

כלומר טור פורייה של הפונקציה לא מתכנס בהכרח לפונקציה.

בס"ד

26.5.13
שיעור 2!!

אנליזה $_{(9)}$ מודרנית 2

נשאר להוכיח שזה פונקציונל לינארי ורציף

לינאריות - ברור

רציפות

עבור x קבוע

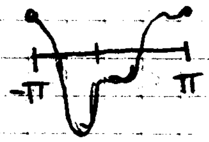
$$|\varphi_N(x)| \le K\|x\|$$
$$\downarrow$$
$$|\varphi(x)| \le K\|x\|$$

$\Rightarrow$ כי $\|\varphi\| \le K$

<u>הערה</u>: נניח כי $\underbrace{(X, \|\cdot\|) + \text{שלם}}_{\text{מרחב בנך Banach}}$

משפט בנך-שטיינהאוס) - במרחב שלם, אם $\varphi_N \xrightarrow{w} \varphi$ אזי $\|\varphi_N\| \le K$

<u>דוגמא</u>: $f \in L^2(T)$



שווה במובן של נורמה

$$f(t) \overset{L}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) \underbrace{e^{ikt}}_{\text{בסיס אורתונורמלי}} \qquad \hat{f}(k) = \int_{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$$

· נניח f רציפה $f \in C(\mathbb{T})$ האם הטור מתכנס במ"ש? או נקודתית
במובן המחזורי $f(-\pi) = f(\pi)$

<u>משפט</u>: לא בהכרח יש התכנסות נקודתית

<u>הוכחה</u> - טור פורייה לא מתכנס בנק' $t=0$; $\exists\, f \in C(\mathbb{T})$

$$S_N(f,0) = \sum_{|k|\le N} \hat{f}(k)\cdot 1 = \sum_{|k|\le N} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$$

f(0)
ערך f בנק'
האפס ב
פונקציונל לינארי
רציפה ב-C
כלומר נסמן
במקום ערך של
הפונקציה
נניח
שהמשפט
לא
כמו פונקציה
וקבוע לכל
פונקציה
רציפות

$$= \int_{\mathbb{T}} f(t) \Big[\underbrace{\sum_{|k|\le N} e^{-ikt}}_{D_N(t)}\Big] \frac{dt}{2\pi}$$

גרעין דריכלה

$$S_N(f,t) = \sum_{|k|\le N} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

$$\|f - S_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \to 0$$

$$S_N(f,0) = \int f(t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi}$$

$f \in C(\mathbb{T})$

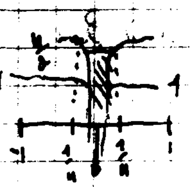
נוכיח מהי נורמת פונקציונל הרציפות

30.5.13

אנליזה מודרנית 2 ③

③ $X = C[-1,1]$ אינטגרל של צפיפות

$$\varphi_n(f) = \underbrace{\frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} f(t)\,dt}_{\text{ערך ממוצע}} = \int_I \underbrace{a_n(t)}_{\text{צפיפות של הפונקציה}} f(t)\,dt$$



(i)

משפט ערך הביניים האינטגרליים

(i) $\varphi_n(f) = f(\xi)\,,\ \xi \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ נקבע את f

$\int_I a_n(t)\,dt = 1$

קיימת נקודה של שוויון אינטגרל לא הקבוע

$$\varphi_n(f) \longrightarrow f(0)$$

$$\varphi_n \xrightarrow{w} \delta_0$$

(ii) $\|\varphi_n - \delta_0\| = 2$ $\qquad \varphi_n(f) =$ הממוצע של f בקטע $-\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}$

$$\varphi_n(f) - \delta_0 = (1-\varepsilon) - (-1)$$

⇐ אין התכנסות בנורמה

תרגיל: להוכיח שלא ניתן לקבל $\varphi_n \to \delta_0$ בנורמה אם φ_n פונקציונלים עם צפיפות

* משפט: $X, \|\cdot\|$ מרחב לינארי נורמי.

φ_n סדרת פונקציות כך ש: $\quad (1)\ \|\varphi_n\| \le K$

(2) $\exists\, Y \subset X$ צפופה $;\ \forall y \in Y\ \exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(y)$

אז: $\exists\, \varphi \in X^*\,,\ \varphi_n \xrightarrow{(w)} \varphi$

הוכחה

נקבע $x \in X$, נוכיח ש- $\{\varphi_n(x)\}$ מתכנסת. יהי $\varepsilon > 0$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |\varphi_n(x) - \varphi_n(y) + \varphi_n(y) - \varphi_m(y) + \varphi_m(y) - \varphi_m(x)|$$

$[\exists\, y \in Y\,,\ \|x-y\| < \varepsilon]$

$$\le \underbrace{|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|}_{\substack{\text{זה לינאריות} \\ \|\varphi_n\|\cdot\|x-y\| \le K\varepsilon}} + \underbrace{|\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|}_{\substack{\le \varepsilon \quad (n,m) > N \\ \text{יש התכנסות עבור הy}}} + \underbrace{|\varphi_m(y) - \varphi_m(x)|}_{\le \|\varphi_m\|\cdot\|x-y\| \le K\varepsilon}$$

$\Rightarrow \forall n,m > N \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \le (2K+1)\varepsilon \Rightarrow$ זוהי סדרת קושי ולכן מתכנסת

$\Rightarrow \forall x \in X \quad \exists \lim \varphi_n(x) := \varphi(x)$

20.5.13
למניינם!!

אנליזה מודרנית 2

* התכנסות במרחב הצמוד $\quad X^* = \{\varphi\} \quad (X, \|\cdot\|)$

① התכנסות בנורמה $\quad \|\varphi\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\varphi(x)|$

$\|\varphi_n - \varphi\|_{X^*} \to 0 \qquad \varphi_n \to \varphi$ (התכנסות במ״ש על כדור היחידה)

② התכנסות חלשה

$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \ (n\to\infty) \qquad \forall x\in X \qquad \varphi_n \xrightarrow{(w)} \varphi$

דוגמאות:

① $\ell_2 = \{(x_1,x_2,\dots) : \sum |x_j|^2 < \infty\}$

$\varphi_k(x) = x_k = \langle x, (0,0,\dots,\underset{k}{1},0\dots0)\rangle$

(i) $\varphi_k \xrightarrow{(w)} 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \Rightarrow x_k \to 0 \Rightarrow \varphi_k(x) \to 0$ עבור x

(ii) $\|\varphi_k - \underset{0}{\varphi}\| = 1 \Rightarrow \|\varphi_k - \varphi\| \not\to 0$ אין התכנסות בנורמה

[התכנסות בנורמה ⇐ התכנסות חלשה לכן אם $\varphi \neq 0$ לא יכול להיות כי אז היית צריכה להיות התכנסות חלשה ב $\varphi\neq 0$]

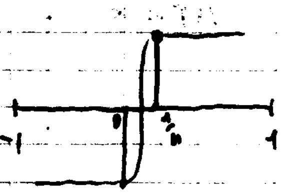
② $X = C[-1,1] \qquad \varphi_n(f) = f(\tfrac1n) \qquad [\delta_{\frac1n}]$

תמיד עם נורמת ה-sup

(i) $\varphi_n(f) = f(\tfrac1n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{מרציפות}} f(0) \qquad [\delta_0(f)]$

$\Rightarrow \delta_{\frac1n} \xrightarrow{(w)} \delta_0$

(ii) $\|\delta_{\frac1n} - \delta_0\|_{C^*} = \sup_{\|f\|\le 1} |(\delta_{\frac1n} - \delta_0)(f)| = 2$ אין התכנסות בנורמה



$f_n, \ \|f_n\| \le 1$

תרגיל: להוכיח כי אם $\dim X < \infty$ אז התכנסות חלשה שקולה להתכנסות בנורמה

אם X במימד סופי
גם X^* במימד סופי

20 20.5.13

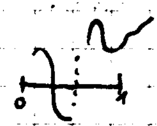
אנליזה מודרנית 2 ①

* פונקציונלים לינאריים $X^* = \{\varphi\}$

$X, \|\cdot\|$ $\quad \varphi : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ כנ"ל לינארי

$$\|\varphi\| := \sup_{\|x\|\le 1} |\varphi(x)| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$$

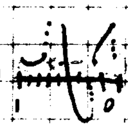
$\|\varphi\| < \infty \Leftarrow \varphi$ רציף



$X = C(I)$

$\varphi(t) = \int_I \underbrace{a(t)}_{\text{משקל}} f(t)\,dt$, $\quad \int_I |a(t)|\,dt < \infty$

$\delta_{t_0} = f(t_0)$ $\quad t_0 \in I$

$\rho(t)$  $\mathrm{Var}_I\, \rho :: \sup_T \sum |\Delta \rho_j|$

משפט Riesz

אם $\varphi \in (C(I))^*$ אז הוא מהצורה $\varphi(t) = \int_I f(t)\,d\rho(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\rho_i$

[Riemann stiltjes] $\quad \|\varphi\| = \mathrm{Var}_I\, \rho < \infty$

• המרחב הצמוד/הדואלי X^* - כל הפונקציונלים הרציפים

במרחב זה יש $\varphi_1+\varphi_2$, $\lambda\varphi$, $\|\varphi\|$

$\Leftarrow$ זהו מרחב לינארי עם נורמה.

• ראינו שעבור מרחב הילברט $(H)^* \cong H$

• $\|\varphi\|_{C^*} = \|\rho\|_V$, $\quad (C(I))^* \cong V$

$V =$ מרחב כל הפונקציות שמקיימות $\|\varphi\| = \mathrm{Var}_I\, \rho < \infty$

• $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\quad (\ell_p)^* \cong \ell_q$

• $(c_0)^* \cong \ell_1$ ← כל הסדרות שמתאפסות באינסוף עם נורמת ה sup

אנליזה מודרנית ב

19 17.5.13

אנליזה מודרנית 2 (5)

$C(I)$ $\qquad \|f\| = \sup_{t\in I} f(t)$

$$\varphi(f) := \int_I a(t) f(t)\, dt$$

$\|f\| \le 1$ $\qquad \|\varphi\| \le \int_I |a(t)|\, dt \quad \Rightarrow \quad |\varphi(t)| \le \|f\| \int_I |a(t)|\, dt$

עבור $f(t) = \mathrm{sign}(a(t))$ נקבל שוויון אבל f לא במרחב

ולכן נקרב אותה ונקבל

$$f_n(t) \to \mathrm{sign}(a(t)) \qquad f_n(t),\ n=1,\dots$$

$$\Rightarrow \|f_n\| \le 1 \quad , \quad |\varphi(f_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I |a(t)|\, dt$$

$$\Rightarrow \|\varphi\| = \int_I |a(t)|\, dt$$

t_0

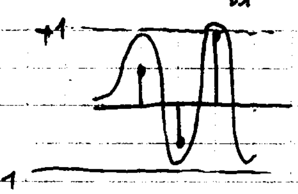
$$\delta_{t_0} : f \xrightarrow[C(I)]{} f(t_0)$$

$$\|\delta_{t_0}\| \le 1 \Rightarrow \|\delta_{t_0}\| = 1$$

• ניתן גם להגדיר

$\sup_{\|f\|\le 1} |f(t_i)| \le 1$

$$\varphi = a_1\delta_{t_1} + a_2\delta_{t_2} + \dots + a_n\delta_{t_n}$$



$$\|\varphi\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

• ניתן גם להגדיר פונקציונל ע"י חיבור פונקציונלים כנ"ל Riesz

<u>תרגיל:</u> לחשב את נורמת הפונקציונל הנתון ב $C(I)$ וב $L^2(I)$

(1) $\varphi(t) = \int_{-1}^{0} f(t)\, dt - \int_{0}^{1} f(t)\, dt \qquad I = [-1,1]$

(2) $\varphi(t) = \int_0^{\pi} \frac{\sin 10t}{t} f(t)\, dt \qquad I = [0,\pi]$

(3) $f(t) = \int_0^{\pi} \cos t \cdot f(t)\, dt - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad I = [0,\pi]$

אנליזה מודרנית 2

④

17.5.13 שיעור!

$1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

נרצה להראות שכל סדרה
ב l_q משרה פונקציונל רציף
ולכל פונקציונל מתאים מרחב של
l_p: (1) $\vec{a} \in l_q$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

$$|\varphi(x)| \le \left(\sum_{1}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

φ פונקציונל רציף

(2) $a_k = \varphi(0,0,\dots,\underset{k}{1},0,\dots 0)$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \\ \sum_1^n |x_k|^p \le 1}} \left|\sum_{1}^{n} a_k x_k\right| = \varphi(x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)$$

$$= \sup_{\|x\|_p \le 1} |\varphi(x_1,\dots,x_n,0,\dots)| \le \|\varphi\|$$

החסם לא תלוי ב n

$$\underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \|a\|_q \le \|\varphi\|$$

מא"י שוויון ההפוך (Holder)

$$\|\varphi\| \le \|a\|_q$$

$$\|\varphi\| = \|a\|$$

כל הווריאציות
מתכנסים בקרוב
סדרה חסומה, x מתכנס בהחלט

תרגיל: להוכיח כי ב l_1

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, $a \in l_\infty$

הערה: ל l_∞ זה לא נכון

$a \in l_1 \longmapsto \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ ⊛ φ פונק' רציף אבל יש עוד פונקציונלים

תרגיל: נסתכל במרחב $C_0 = \{x=(x_1,x_2,\dots) : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

(1) C_0 מרחב נורמי שלם (תת סגור של l_∞)

(2) כל פונקציונל רציף φ הוא מהצורה (⊛)

בס"ד

18 17.5.13

אנליזה מודרנית ב (3)

משפט: (Riesz)

H מרחב הילברט, φ פונקציונל לינארי ורציף. אזי קיים $a\in H$ כך ש

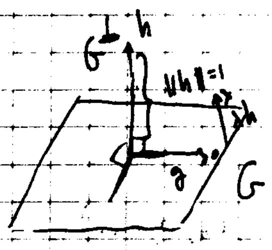
$\varphi(x) = \langle x,a \rangle$ (וגם $\|\varphi\| = \|a\|$)

הוכחה

יהי φ. נניח $\varphi\not\equiv 0$ (אחרת $a=0$) נגדיר $G = \{x\in H : \varphi(x)=0\}$ $(=\ker\varphi)$.

זהו תת מרחב לינארי [סגור לחיבור וכפל בסקלר] וסגור כי φ רציף.

טענה: $\dim G^{\perp} = 1$



$\dim G^{\perp} > 0$. ברור כי $G^{\perp}\neq\{0\}$

כי למדנו שתמיד ניתן ~~[illegible]~~

לפרק לסכום איבר אחד ושמאונך ל G.

נניח $0\neq h_1,h_2\in G^{\perp}$ ונגדיר $h := \varphi(h_2)\cdot h_1 - \varphi(h_1)h_2$

$$\varphi(h) = \varphi(h_2)\varphi(h_1) - \varphi(h_1)\varphi(h_2) = 0$$

לכן $h\in G$, וגם $h\in G^{\perp}$ $\Rightarrow h=0$

לכן h_1,h_2 ת"ל $\Rightarrow \dim G^{\perp}=1$ ∎

ניקח $h\in G^{\perp}$ עם $\|h\|=1$

ההיטל של x על המרחב

$$x\in H,\quad x = \underset{\in G}{g} + \lambda h = g + \langle x,h\rangle h$$

$g\in G$ כי

$$\varphi(x) = \underset{=0}{\varphi(g)} + \langle x,h\rangle\varphi(h) = \langle x, \underbrace{\overline{\varphi(h)}h}_{a}\rangle$$

• נתבונן ב $H = l_2$, $\vec{a}=\{a_k\}$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$

$$\|\varphi\| = \|a\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2}$$

אנליזה מודרנית 2

17.5.13

דוגמא: $1\le p\le\infty$ $\quad \ell_p^d \quad x\in\mathbb{R}^d \quad \|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{d}|x_k|^p\right)^{1/p}$

ושוו תלויה ב $\|x\|$ תכן היא
מטענה ממרחב למרחב

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{d}a_kx_k$$

$$\|\varphi\|=\sup_{x:\ \sum_1^d|x_k|^p\le 1}\left|\sum_{k=1}^{d}a_kx_k\right|$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

q - אקספוננט צמוד של p

$$\le\left(\sum_{k=1}^{d}|a_k|^q\right)^{\frac1q}\ \Rightarrow$$ ש‍וויון בהולדר - ...מינימום — x^k שוויון העלף

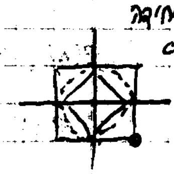
הקלי... p
מתאימות ... q
ולכן הנורמה קונה

$$\Rightarrow\quad \|\varphi\|_{\ell_p^d\to\mathbb{R}}=\|a\|_{\ell_q^d}$$

תרגיל: לבדוק כי

$$\|\varphi\|_{\ell_1^d\to\mathbb{R}}=\|\vec a\|_{\ell_\infty^d}$$

• $\ell_\infty^{(2)}$



עבור $\varphi(x)=5x_1-2x_2$

$$\|\varphi\|_{\ell_\infty^2\to\mathbb{R}}=5+2=7$$

הנקודה הנותנת מקסימום היא $(1,-1)$

המרחב קמור ולכן גם הנורמה

$$\|\varphi\|_{\ell_2^2\to\infty}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$$

$$\|\varphi\|_{\ell_1^2\to\mathbb{R}}=5$$

• נדבר על מרחב הילברט H:

$a\in H\ ,\ \varphi_a(x):=\langle x,a\rangle$ — ברור שהוא לינארי

$$|\varphi_a(x)|\overset{\text{קושי שוורץ}}{\le}\|a\|\cdot\|x\|\ \Rightarrow\ \boxed{\|\varphi_a\|=\|a\|}$$

 בס"ד

אנליזה מודרנית - 2

1

* פונקציונלים

יהי X מרחב לינארי עם נורמה $\varphi: X \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ זהו פונקציונל לינארי

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2)$$

במרחב סופי פונקציונל לינארי הוא תמיד רציף אבל במרחב לא סופי אז לא בהכרח

נגדיר: $\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\varphi(x)|$

<u>משפט:</u> (i) אם φ רציף בנק' $x_0 = 0$ אז $\|\varphi\| < \infty$

(ii) אם $\|\varphi\| < \infty$ אז φ רציף <u>בכל</u> נק'

<u>הוכחה</u>

(i) מלינאריות $\varphi(0) = 0$

מרציפות עבור $\varepsilon = 1$: $\exists \delta > 0 : \|x\| \le \delta \Rightarrow |\varphi(x)| < 1$

מלינאריות $\|x\| \le 1 \Rightarrow |\varphi(x)| \le \frac{1}{\delta}$

$$\Rightarrow \|\varphi\| \le \frac{1}{\delta}$$

(ii) יהי $x_0 \in X$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \overset{\text{לינאריות}}{=} |\varphi(x - x_0)| \le \|\varphi\| \cdot \|x - x_0\|$$

המרחק בין שני איברים חסום בנורמה שלהם

$$\Rightarrow x \to x_0 \Rightarrow \varphi(x) \to \varphi(x_0)$$

<u>תרגיל:</u> להראות כי $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \sup_{x \ne 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$

מהתרגיל $\Rightarrow$ הפונקציונל חסום עבור $|\varphi(x)| \le C\|x\|$

$\|\varphi\|$ הוא הקבוע הכי קטן לכל $x \in X$

- מעכשיו נעבוד רק עם פונקציונלים רציפים. נורמה סופית $\Rightarrow$ רציפות

• דוגמא: $x \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_d x_d$

$$\|\varphi(x)\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |a_k|^2} \cdot \|x\|_2$$

קושי-שוורץ

$$\Rightarrow \|\varphi\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |a_k|^2}$$

הקבוע C צריך להיות מינימלי

טענה: $\|\varphi\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |a_k|^2}$ מתי מתקיים שוויון?!