

מד"ר קיץ – תרגיל 4: מערכות והתמרת לפלס

פתרו את המד"ר הבאות. אם לא נתון תנאי התחלה עליכם לתת את הפתרון הכללי.

1.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{א.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(\pi) \\ y(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ו.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ח.}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{ט.}$$

י. (ממבחן) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. בהנתן $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, מהו $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - y(t))$?

2. חשבו את התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

א. $f(t) = 6e^{-5t} + e^{3t} + 5t^3 - 9$

ב. $f(t) = 3\sinh(2t) + 3\sin(2t)$

ג. $f(t) = tg'(t)$ (עבור $g(t)$ פונקציה כלשהי הגזירה ברציפות בקטע $(0, \infty)$)

ד. $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$ (אתם רשאים להתעלם מנקודות התפר $t=1, 2$)

3. חשב את התמרת לפלס ההפוכה של הפונקציות הבאות:

$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \quad \text{א.}$$

$$F(s) = \frac{6}{s} - \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3} \quad \text{ב.}$$

$$F(s) = \frac{3s-2}{2s^2-6s-2} \quad \text{ג.}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \quad \text{ד.}$$

$$F(s) = \frac{se^{-4s}}{(3s+2)(s-2)} \quad \text{ה.}$$

4. פתור את המד"ר הבאות בעזרת התמרת לפלס:

$$\begin{cases} 2y'' + 3y' - 2y = te^{-2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2\sin(3t) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y'' - y = t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{עם תנאי התחלה} \quad y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1 \quad \text{עם תנאי התחלה} \quad y'' + 4y = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ה.}$$