**משפט**

תהי מטריצה כך ש - מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

 לכסינה לכל ערך עצמי של מתקיים .

**הוכחה**

נניח ש - לכסינה. אזי, קיים בסיס של המורכב מווקטורים עצמיים של .
נחלק את האיברים של לקבוצות המתאימות לערכים עצמיים שונים של . ().
לכן, . מצד שני, , , לכן:
 .
\*הערה: מתפרק לחלוטין.
לכן, , לכן .

נניח שלכל מתקיים ().
נתבונן במרחבים העצמיים: . לכל מתקיים .
בכל אחד מ- נבחר בסיס . נגדיר: .
*.
נסמן* .
לכן, בסיס ולכן לפי הקריטריון הכללי לכסינה.

**הערה** 1. אם A לכסינה אזי בהכרח מתפרקת לחלוטין.

 **הוכחה:** נניח לכסינה, לכן:. לכן:

*2. יהי כך ש- מתפרק לחלוטין. אזי T ניתן ללכסון לכל ערך עצמי של T מתקיים .*

*3.**יהי אזי מתקיים המשפט היסודי של אלגברה: כל פולינום מעל המרוכבים מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים.*

***שילוש***

***הגדרה*** *אומרים שמטריצה A* ***שלישה (ניתנת לשילוש)*** *אם היא דומה למטריצה משולשת עליונה.****הערה*** *מטריצה משולשת עליונה דומה למטריצה משולשת תחתונה.*

***הוכחה*** *תהי*  (משולשית עליונה). נגדיר נוכיח ש- משולשית תחתונה. (**תרגיל:** להוכיח. רמז: ).

***משפט (קריטריון שילוש)****מטריצה ניתנת לשילוש אם ורק אם הפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.****הוכחה***

*נניח ש - ניתנת לשילוש. לכן:* . נחשב:

*וזו מכפלה של גורמים לינאריים.*

*נניח שהפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. לכן:*

*. נסמן . נבחר ווקטור עצמי המתאים ל - . נשלים את הקבוצה עד בסיס B של : . נגדיר . P הפיכה שכן עמודותיה בת"ל. נתבונן במטריצה .*

כעת, נשתמש באינדוקציה על .

בסיס: - אין מה להוכיח.

צעד: נניח נכונות המשפט עבור . נוכיח נכונות המשפט עבור .

נתבונן בפולינום האופייני:

 *מתפרקת לחלוטין (שכן מתפרק לחלוטין), לכן, לפי הנחת האינדוקציה, ניתנת לשילוש. ז"א, קיימת Q כך ש - משולשת עליונה.
נגדיר: .*

*(****תרגיל בית:*** *לבדוק ש*  משולשית).