

## תרגיל בית 2 - טופולוגיה

### שאלה 1

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה- $p$ -adic באופן הבא: עבור  $p \in \mathbb{N}$   
ראשוני מגדירים מטריקה על  $\mathbb{Z}$

$$k(x, y) = \max \{i : p^i \mid (x - y)\} \text{ עבור } , d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x, y)}} & x \neq y \end{cases}$$

א. הוכיחו ש  $p^n \xrightarrow{d_p} 0$ .

ב. תארו את הכדור  $B_{d_7} \left( 3, \frac{1}{49} \right)$  במרחב  $(\mathbb{Z}, d_7)$ .

ג. עבור  $t \in \mathbb{Z}$  מצאו דוגמא לסדרה לא קבועה במרחב  $(\mathbb{Z}, d_3)$  המתכנסת ל- $t$ .

### שאלה 2

יהיו  $x_1, x_2 \in (X, d)$  ו- $r_1, r_2 > 0$  ויהיו  $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2)$  כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי  $p \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$  ו-

$$r = \min \{r_1 - d(p, x_1), r_2 - d(p, x_2)\}$$

הוכיחו ש-  $B(p, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ .

### שאלה 3

יהי  $(X, d)$  מרחב אולטרה-מטרי. הוכיחו:

א. לכל  $\varepsilon > 0$  ולכל  $x, y \in X$   $B(x, \varepsilon) = B(y, \varepsilon)$  או  $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ .

ב.  $\{x_n\} \subseteq X$  סדרת קושי אם ורק אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ .

#### שאלה 4

במרחב  $l_\infty$  הראו שהסדרה  $x_n = \left( \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots \right)$  מתכנסת, ומצאו את גבולה.

#### שאלה 5

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי  $(X, \sigma)$  מרחב מטרי, ויהי  $(Y, \sigma_Y)$  תת מרחב מטרי שלו. תהי  $\{x_n\} \subseteq Y$  ו-  $y \in Y$ . אזי  $x_n \xrightarrow{\sigma_Y} y$  אם ורק אם  $x_n \xrightarrow{\sigma} y$ .

נתבונן במרחב  $\langle \mathbb{I}, d \rangle$  כאשר  $\mathbb{I}$  הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו-  $d$  היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ-  $\mathbb{R}$ . נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_n = \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}}$$

- ב. הוכיחו שהסדרה  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{I}$ .
- ג. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי  $\langle \mathbb{I}, d \rangle$ .

#### שאלה 6

הוכיחו או הפריכו שקיים שיכון איזומטרי במקרים הבאים:

א)  $\left\{ \sqrt{3} - \frac{n}{2n+5} : n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \mathbb{Q} \cap (2004, \infty)$

ב)  $(\mathbb{Z}, d_5) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_9)$

שאלת אתגר (לא להגשה)

הראו שאם  $(X, \|\cdot\|)$  מרחב נורמי ו- $d$  המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא**  
קיימים כדורים **שוניים**  $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2)$  כאשר  $r_1 < r_2$  ו  $B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2)$ .

**בהצלחה!**