מבחן מועד ג' – בדידה למורים באר שבע

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: דר' ארז שיינר תאריך: 01/11/17 חומר עזר: מותר מחשבון

הוראות: יש לענות על כל השאלות. כל שאלה שווה 24 נק'. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. תהיינה שתי פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר ש f <u>מתאימה</u> ל g אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}:\left(f(x_1)\neq g(x_2)\right)\wedge\left(f(x_2)=g(x_1)\right)$$

f <u>אינה</u> מתאימה ל g אם $\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}:\left(f(x_1)=g(x_2)\right)\vee\left(f(x_2)\neq g(x_1)\right)$

א. האם $f(x)=x$ מתאימה ל $g(x)=x^2$?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_1)\neq g(x_2)$ וגם $f(x_2)=g(x_1)$,

כלומר $x_1\neq(x_2)^2$ וגם $x_2=(x_1)^2$.

אבל אם $x_1=0$ לכל $x_2\in\mathbb{R}$ $0=(x_2)^2$ או $x_2\neq(0)^2$, ולכן f <u>אינה</u> מתאימה ל g .

ב. האם $f(x)=x^2$ מתאימה ל $g(x)=x$?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_1)\neq g(x_2)$ וגם $f(x_2)=g(x_1)$,

כלומר $(x_1)^2\neq x_2$ וגם $(x_2)^2=x_1$, שוב עבור $x_1=0$ אין פתרון משותף לזוג המשוואות הללו ולכן f <u>אינה</u> מתאימה ל g .

ג. האם $f(x)=x$ מתאימה ל$g(x)=x+1$?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_1)\neq g(x_2)$ וגם $f(x_2)=g(x_1)$,

כלומר $x_1\neq x_2+1$ וגם $x_2=x_1+1$.

נבחר $x_2=x_1+1$ ואכן $x_2+1=x_1+2\neq x_1$.

לכן הפונקציה f <u>מתאימה</u> לפונקציה g .

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שתי קבוצות A,B אם $A\setminus B\subseteq B\setminus A$ אזי $A=\varnothing$.

<u>הפרכה</u>: נבחר $A=B=\{1\}$, אכן $A\setminus B=\varnothing\subseteq B\setminus A$ אך $A\neq\varnothing$.

ב. לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\setminus\left(B\setminus C\right)\subseteq\left(A\setminus B\right)\setminus C$.

<u>הפרכה</u>: נבחר $A=C=\{1\},B=\varnothing$.

כעת $A\setminus\left(B\setminus C\right)=\{1\}$ אך $\left(A\setminus B\right)\setminus C=\varnothing$.

ג. לכל שלוש קבוצות A,B,C , אם $A\subseteq C$ אזי $A\cap B\subseteq\left(C\cap B\right)\setminus\left(C\setminus A\right)$.

<u>הוכחה</u>: יהי $x\in A\cap B$ צריך להוכיח כי $x\in\left(C\cap B\right)\setminus\left(C\setminus A\right)$.

$x\in A$ ולכן לפי הנתון $x\in C$, ביחד עם העובדה ש $x\in B$ נובע כי $x\in C\cap B$.

כיוון ש $x\in A$ נובע כי $x\notin C\setminus A$ וסה"כ קיבלנו ש $x\in\left(C\cap B\right)\setminus\left(C\setminus A\right)$.

3. הוכיחו כי לכל $n>1$ מתקיים כי n^3-n מתחלק ב3.

נוכיח באינדוקציה. בדיקה: עבור $n=2$ אכן $2^3-2=6$ מתחלק ב3.

יהי n עבורו n^3-n מתחלק ב3, עלינו להוכיח כי $(n+1)^3-(n+1)$ מתחלק ב3.

אכן,

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=n^3-n+3(n^2+n)$$

הוא סכום של שני ביטויים המתחלקים ב3, ולכן מתחלק ב3.

<u>הוכחה נוספת ללא אינדוקציה</u>: $n^3-n=n\left(n^2-1\right)=(n-1)n(n+1)$ ומתוך שלושה מספרים עוקבים אחד חייב להתחלק ב3.

4. תהיינה שתי פונקציות $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f\circ g$ הפיכה ו g על אזי g הפיכה.

<u>הוכחה</u>: $f\circ g$ הפיכה ולכן חח"ע. לכן g חח"ע. כיוון שנתון כי g על היא הפיכה.

ב. אם $f\circ g$ הפיכה ו g על אזי f הפיכה.

<u>הוכחה</u>: כבר הוכחנו ש g הפיכה במקרה זה. $f=\left(f\circ g\right)\circ g^{-1}$ ולכן חח"ע כהרכבה של חח"ע.

כמו כן, כיוון ש $f\circ g$ על, גם f על. ביחד f הפיכה.

ג. אם f על ו g חח"ע אז $f+g$ אינה חח"ע

<u>הפרכה</u>: נבחר את $f(n)=g(n)=n$ להיות פונקצית הזהות, היא חח"ע ועל.

$\left(f+g\right)(n)=2n$ חח"ע.

5. בהינתן 3 נשים ו4 גברים

א. בכמה דרכים ניתן לסדר את כולם בשורה?

ישנן $7!$ דרכים לסידור 7 חפצים בשורה

ב. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה כך שכל הגברים יהיו צמודים זה לזה?

נקבץ את כל הגברים ביחד עם אזיקים ונתייחס אליהם בינתיים כיחידה אחת. יש לנו 3 נשים ויחידת גברים לסדר, כמות האפשרויות היא $4!$. כעת, בכל סידור כזה, ניתן לסדר את הגברים בתוך יחידת הגברים ב$4!$ דרכים. לכן סה"כ $4!\cdot 4!$.

ג. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם כך שלא יהיו שני גברים צמודים?

על מנת לסדר את כולם בשורה כך שלא יהיו שני גברים צמודים, הסידור חייב להיות גבר, אישה, גבר, אישה וכן הלאה. כל מה שנותר לנו לעשות הוא לסדר את הגברים במקומות של הגברים, ואת הנשים במקומות של הנשים. סה"כ $4!\cdot 3!$

נוסחאות הבחירה:

k מתוך n	עם סדר	בלי סדר
עם חזרה	n^k	$\binom{n-1+k}{n-1}$
בלי חזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$