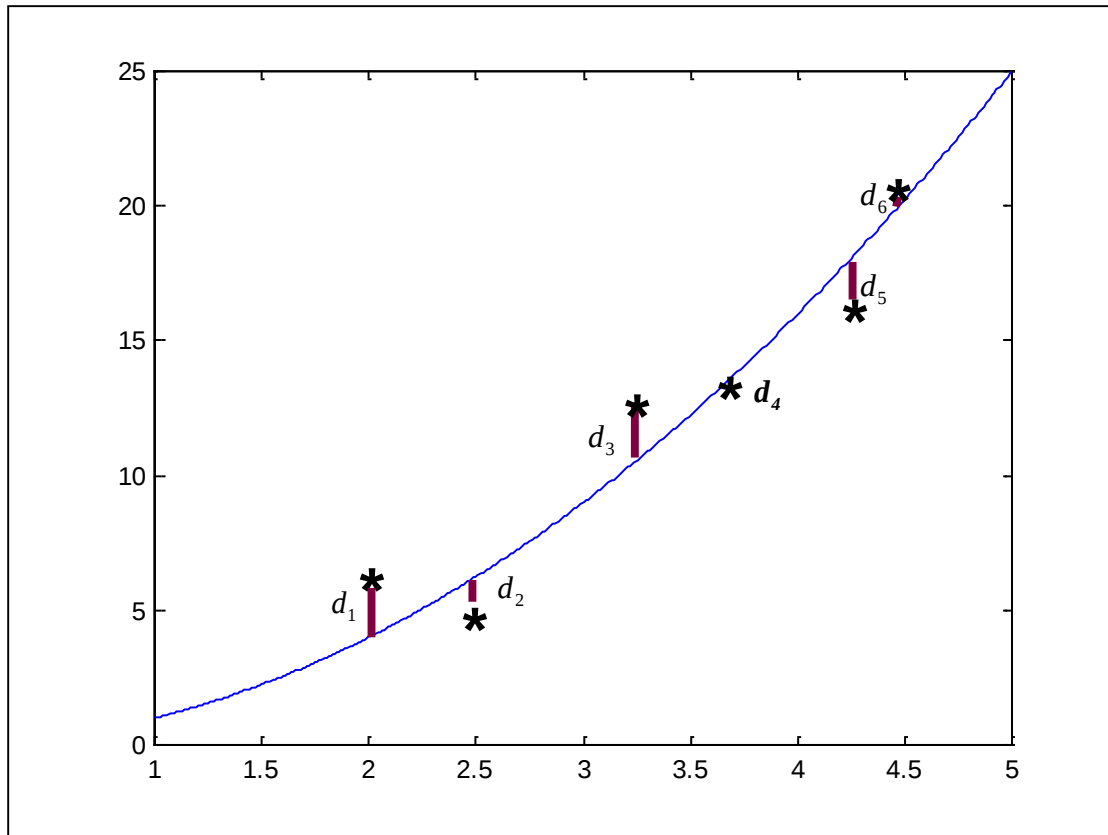


קירוב ריבועים מינימאליים

LEAST SQUARES APPROXIMATION

קירוב ריבועים מינימאליים - הקדמה

בהינתן מדידות $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$



מטרה : למצוא פונקציה המתארת בצורה הכי טובה את ההתנהגות של נקודות המדידה (לאו דווקא עוברת דרך נקודות עצמן)

קירוב ריבועים מינימאליים-הקדמה

- מהו הקריטריון לבניית הקירוב?
- נסמן d_i - המרחק האנכי בין הנקודה בטבלה (x_i, y_i) לעקומת הקירוב
- קריטריון הגיוני : מציאת עקומה הנותנת מינימום של $\max_i |d_i|$.
(קירוב מינימקס)
- גישה אחרת – למצוא עקומה בנותנת מינימום של $\sum_{i=1}^N d_i^2$
(קירוב ריבועים מינימאליים)

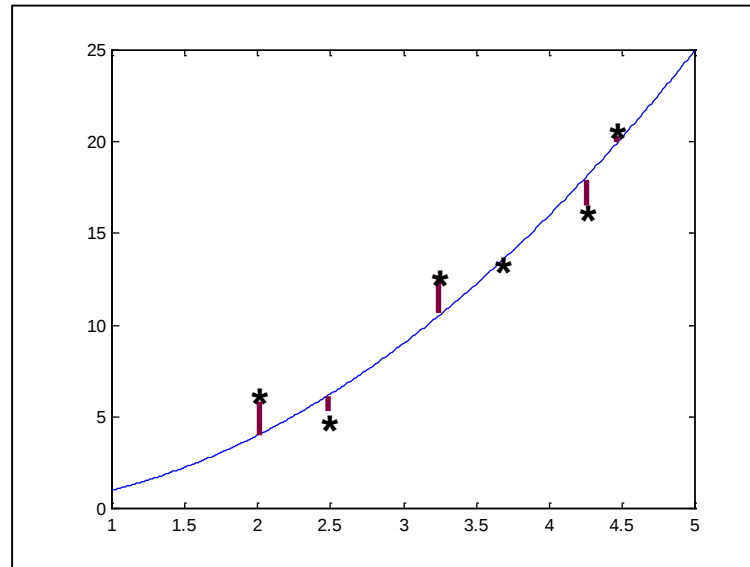
קירוב פולינומי בעזרת ריבועים מינימאליים

נתונות N נקודות במישור, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$,

ברצוננו למצוא פולינום $Q_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m$

כך ש

$$E(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{k=1}^N d_k^2 = \sum_{k=1}^N [y_k - Q_m(x_k)]^2 \rightarrow \min$$



$$E(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 - c_1 x_k - c_2 x_k^2 - \dots - c_m x_k^m]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad : E(c_0, c_1, \dots, c_m) \text{ של מינימום}$$

באופן מפורש:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial c_0} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 - c_1 x_k - c_2 x_k^2 - \dots - c_m x_k^m] \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial c_1} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 - c_1 x_k - c_2 x_k^2 - \dots - c_m x_k^m] \cdot x_k = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial c_2} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 - c_1 x_k - c_2 x_k^2 - \dots - c_m x_k^m] \cdot x_k^2 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E}{\partial c_m} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 - c_1 x_k - c_2 x_k^2 - \dots - c_m x_k^m] \cdot x_k^m = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = -2 \sum_{k=1}^N \left[y_k - c_0 - c_1 x_k - c_2 x_k^2 - \dots - c_m x_k^m \right] \cdot x_k^i = 0, \quad i = 0, \dots, m$$

מתקבלת מערכת של $(m+1)$ משוואות ליניאריות בנעלמים $c_0, c_1, \dots, c_m$
הנקראת מערכת משוואות נורמאליות

הצגה שקולה למערכת נתונה ע"י

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{k=1}^N 1 \right) \cdot c_0 + \left(\sum_{k=1}^N x_k \right) \cdot c_1 + \left(\sum_{k=1}^N x_k^2 \right) \cdot c_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^N x_k^m \right) \cdot c_m = \sum_{k=1}^N y_k \\ \left(\sum_{k=1}^N x_k \right) \cdot c_0 + \left(\sum_{k=1}^N x_k^2 \right) \cdot c_1 + \left(\sum_{k=1}^N x_k^3 \right) \cdot c_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^N x_k^{m+1} \right) \cdot c_m = \sum_{k=1}^N y_k x_k \\ \vdots \\ \left(\sum_{k=1}^N x_k^m \right) \cdot c_0 + \left(\sum_{k=1}^N x_k^{m+1} \right) \cdot c_1 + \left(\sum_{k=1}^N x_k^{m+2} \right) \cdot c_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^N x_k^{2m} \right) \cdot c_m = \sum_{k=1}^N y_k x_k^m \end{array} \right.$$

מערכת המשוואות הנורמאליות

הצגה מטריציונית שקולה:

$$\begin{bmatrix}
 N & \sum_{k=1}^N x_k & \sum_{k=1}^N x_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^N x_k^m \\
 \sum_{k=1}^N x_k & \sum_{k=1}^N x_k^2 & \sum_{k=1}^N x_k^3 & \dots & \sum_{k=1}^N x_k^{m+1} \\
 \sum_{k=1}^N x_k^2 & \sum_{k=1}^N x_k^3 & \sum_{k=1}^N x_k^4 & \dots & \sum_{k=1}^N x_k^{m+2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sum_{k=1}^N x_k^m & \sum_{k=1}^N x_k^{m+1} & \sum_{k=1}^N x_k^{m+2} & \dots & \sum_{k=1}^N x_k^{2m}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k^2 y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N x_k^m y_k \end{bmatrix}$$

קיום יחידות של פתרון למערכת המשוואות הנורמאליות

ניתן להוכיח כי בהינתן קבוצת נקודות $\{x_k\}_{k=1}^N$ עם $m < N$

מטריצת המקדמים של מערכת המשוואות הנורמאליות המתאימה

הנה סימטרית ומוגדרת חיובית ולכן למערכת המשוואות הנורמאליות

קיים פתרון יחיד .

מקרה כללי - פונקציות בסיסיות כלליות

תהי קבוצת פונקציות בת"ל $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$

$$Q(x) = \sum_{j=0}^m c_j \varphi_j(x)$$

מחפשים צירוף ליניארי (לאו דווקא פולינום)
הטוב ביותר במובן הריבועים המינימאליים.

הגדרת הבעיה :

$$E(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_2 - \dots - c_m \varphi_m]^2 \rightarrow \min$$

$$E(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{k=1}^N [y_k - c_0\varphi_0 - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2 - \dots - c_m\varphi_m]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad : E(c_0, c_1, \dots, c_m) \text{ למינימום של}$$

באופן מפורש:

$$\frac{\partial E}{\partial c_0} = -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0\varphi_0 - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2 - \dots - c_m\varphi_m] \cdot \varphi_0 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0\varphi_0 - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2 - \dots - c_m\varphi_m] \cdot \varphi_1 = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_2} = -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0\varphi_0 - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2 - \dots - c_m\varphi_m] \cdot \varphi_2 = 0$$

$\vdots$

$$\frac{\partial E}{\partial c_m} = -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0\varphi_0 - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2 - \dots - c_m\varphi_m] \cdot \varphi_m = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial c_0} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_2 - \dots - c_m \varphi_m] \cdot \varphi_0 = 0 \\
\frac{\partial E}{\partial c_1} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_2 - \dots - c_m \varphi_m] \cdot \varphi_1 = 0 \\
\frac{\partial E}{\partial c_2} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_2 - \dots - c_m \varphi_m] \cdot \varphi_2 = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial E}{\partial c_m} &= -2 \sum_{k=1}^N [y_k - c_0 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_2 - \dots - c_m \varphi_m] \cdot \varphi_m = 0
\end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix}
\sum_{k=1}^N \varphi_0(\mathbf{x}_k) \varphi_0(\mathbf{x}_k) & \sum_{k=1}^N \varphi_0(\mathbf{x}_k) \varphi_1(\mathbf{x}_k) & \dots & \sum_{k=1}^N \varphi_0(\mathbf{x}_k) \varphi_m(\mathbf{x}_k) \\
\sum_{k=1}^N \varphi_1(\mathbf{x}_k) \varphi_0(\mathbf{x}_k) & \sum_{k=1}^N \varphi_1(\mathbf{x}_k) \varphi_1(\mathbf{x}_k) & \dots & \sum_{k=1}^N \varphi_1(\mathbf{x}_k) \varphi_m(\mathbf{x}_k) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{k=1}^N \varphi_m(\mathbf{x}_k) \varphi_0(\mathbf{x}_k) & \sum_{k=1}^N \varphi_m(\mathbf{x}_k) \varphi_1(\mathbf{x}_k) & \dots & \sum_{k=1}^N \varphi_m(\mathbf{x}_k) \varphi_m(\mathbf{x}_k)
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N y_k \varphi_0(\mathbf{x}_k) \\ \sum_{k=1}^N y_k \varphi_1(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N y_k \varphi_m(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix}$$

הגדרה : מכפלה סקאלרית דיסקרטית של פונקציות $f(x), g(x)$

על קבוצת נקודות $\{x_k\}_{k=1}^N$ היא הסכום

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^N f(x_k) \cdot g(x_k)$$

בהתאם להגדרה זו נקבל תיאור של המערכת בצורה הבאה:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_m \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \varphi_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_m, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, \varphi_0 \rangle \\ \langle y, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, \varphi_m \rangle \end{bmatrix}$$

מטריצת המקדמים היא סימטרית מכיוון ש- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

הגדרה: אם מתקיים

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^N f(x_k) \cdot g(x_k) = 0$$

נאמר כי הפונקציות f, g אורתוגונליות על קבוצת הנק' $\{x_k\}_{k=1}^N$.

הגדרה: קבוצת הפונקציות $\{f_j(x)\}_{j=0}^m$ נקראת קבוצה אורתוגונלית על

קבוצת הנקודות $\{x_k\}_{k=1}^N$ אם $\forall i \neq j: \langle f_i, f_j \rangle = 0$

דוגמא

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-1	0	1	2	1

נבחר $\varphi_0(x) = \sin \pi x, \quad \varphi_1(x) = \cos \pi x$

ונחשב $Q(x) = c_0 \sin \pi x + c_1 \cos \pi x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-1	0	1	2	1
$\varphi_0 = \sin \pi x$	0	-1	0	1	0
$\varphi_1 = \cos \pi x$	-1	0	1	0	-1

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 2$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 3$$

$$\langle y, \varphi_0 \rangle = 2$$

$$\langle y, \varphi_1 \rangle = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{3}$$

$$Q(x) = \sin \pi x + \frac{1}{3} \cos \pi x$$

בדוגמא זו ניכרת התכונה, שכאשר קבוצת הפונקציות הבסיסיות $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^m$

היא אורתוגונאלית על קבוצת הנק' $\{x_k\}_{k=1}^N$, מתקבלת מטריצת

מקדמים אלכסונית.

מסקנה חשובה

כאשר קבוצת הפונקציות הבסיסיות $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^m$ היא אורתוגונלית על קבוצת הנק' $\{x_k\}_{k=1}^N$, מתקבלת מערכת אלכסונית.

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & & & \\ & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & & \\ & & \ddots & \\ & & & \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, \varphi_0 \rangle \\ \langle y, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, \varphi_m \rangle \end{bmatrix}$$

אזי פתרון המערכת

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & & & \\ & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & & \\ & & \ddots & \\ & & & \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, \varphi_0 \rangle \\ \langle y, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, \varphi_m \rangle \end{bmatrix}$$

הוא:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\langle y, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \\ c_1 &= \frac{\langle y, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \\ &\vdots \\ c_m &= \frac{\langle y, \varphi_m \rangle}{\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle} \end{aligned}$$

מקדמים אלו נקראים מקדמי פורייה של y ביחס לקבוצה

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$$

דוגמא נוספת לפולינומים אורתוגונליים

$$\text{נבחר } \varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2 - 2$$

נבדוק תחילה שזוהי קבוצת פונקציות אורתוגונלית על הנקודות $\{x_k\}_{k=1}^5$:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2
φ_0	1	1	1	1	1
φ_1	-2	-1	0	1	2
φ_2	2	-1	-2	-1	2

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$$

כזכור, כאשר הפונקציות הבסיסיות הן אורתוגונליות מתקבלת מערכת אלכסונית:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & & \\ & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \\ & & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, \varphi_0 \rangle \\ \langle y, \varphi_1 \rangle \\ \langle y, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix}$$

שפתרונה הוא

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\langle y, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \\ c_1 &= \frac{\langle y, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \\ c_2 &= \frac{\langle y, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle} \end{aligned}$$

והקירוב הנדרש יהיה: $Q(x) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot (x^2 - 2)$

בדוגמא זו מתקיים:

$$c_0 = \frac{\langle y, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{2+1+1+1+2}{1+1+1+1+1} = \frac{7}{5}$$

$$c_1 = \frac{\langle y, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{-4-1+0+1+4}{4+1+0+1+4} = 0$$

$$c_2 = \frac{\langle y, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle} = \frac{4-1-2-1+4}{4+1+4+1+4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

ולכן נקבל

$$Q(x) = \frac{7}{5} + \frac{2}{7}(x^2 - 2) = \frac{29}{35} + \frac{2}{7}x^2$$

קירוב ריבועים מינימאליים – מקרה רציף

נתונות $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^m$ פונקציות בסיסיות ו- $f(x) \in C[a, b]$

אנו מעוניינים למצוא מקדמים $c_0, c_1, \dots, c_m$ עבור $Q_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j \varphi_j(x)$

כך ש

$$\int_a^b [f(x) - Q_m(x)]^2 dx \rightarrow \min$$

נסמן

$$E(c_0, c_1, \dots, c_m) = \int_a^b \left[f(x) - \underbrace{c_0 \varphi_0(x) - c_1 \varphi_1(x) - \dots - c_m \varphi_m(x)}_{-Q_m(x)} \right]^2 dx$$

תנאי הכרחי למינימום של $E(c_0, c_1, \dots, c_m)$ הינו: $\frac{\partial E}{\partial c_p} = 0, \quad p = 0, 1, \dots, m$

$$\frac{\partial E}{\partial c_p} = -2 \int_a^b [f(x) - c_0 \varphi_0(x) - c_1 \varphi_1(x) - \dots - c_m \varphi_m(x)] \varphi_p(x) dx = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, m$$

ובאופן שקול:

$$\int_a^b f(x) \varphi_p(x) dx = c_0 \int_a^b \varphi_p(x) \varphi_0(x) dx + c_1 \int_a^b \varphi_p(x) \varphi_1(x) dx + \dots + c_m \int_a^b \varphi_p(x) \varphi_m(x) dx, \quad p = 0, 1, \dots, m$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad \text{נגדיר מכפלה (פנימית) סקאלרית רציפה:}$$

אז נקבל את מערכת המשוואות הנורמאליות המתאימה למקרה הרציף:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_0, \varphi_m \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_1, \varphi_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_m, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_m \rangle \end{bmatrix}$$

$$[a, b] = [-1, 1] \quad , \quad f(x) = |x|$$

אפשרות א' נבחר פונקציות בסיסיות $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \varphi_2 = x^2$
(במקרה זה הקבוצה הבסיסית איננה אורתוגונלית)

נחפש $Q_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$

נחשב

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx = 2$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x dx = 0$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx = 0$$

$$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 dx = \frac{2}{5}$$

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 |x| \cdot 1 dx = 1$$

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 |x| \cdot x dx = 0$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^1 |x| \cdot x^2 dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}$$

מתקבלת מערכת המשוואות

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

שפתרונה

$$c_0 = \frac{3}{16}$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{15}{16}$$

$$Q_2(x) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}x^2$$

ומכאן

$$[a, b] = [-1, 1]$$

$$f(x) = |x|$$

אפשרות ב' הפעם נבחר

$$\varphi_0(x) = P_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = P_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$Q_2(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) \quad \text{נסמן}$$

קל לבדוק שפולינומים אלה אורתוגונלים לפי מכפלה סקלרית רציפה בקטע $[-1, 1]$ לכן ניתן לחשב את המקדמים ישירות ע"י

$$a_0 = \frac{\langle f, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{1}{2} \quad a_1 = \frac{\langle f, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = 0 \quad a_2 = \frac{\langle f, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = \frac{15}{16}$$

ומכאן

$$Q_2(x) = \frac{1}{2} P_0 + \frac{15}{16} P_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{15}{16} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16} \cdot x^2$$

פולינומים אורתוגונליים בקטע רציף

פולינומים אורתוגונלים בקטע $[-1, 1]$ לפי מכפלה סקלרית רציפה ידועים, והם נקראים **פולינומי לז'נדר**

כיוון שתכונת האורתוגונליות נשמרת אם כופלים פונקציות בסיסיות בקבועים, מקובל להשתמש בפולינומים מתוקנים.

להלן מספר פולינומי לז'נדר מנורמלים בקטע $[-1, 1]$:

$$\tilde{P}_0(x) = 1$$

$$\tilde{P}_1(x) = x$$

$$\tilde{P}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\tilde{P}_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

הערה: בהמשך נתוודע לנוסחה רקורסיבית לחישוב פולינומים אלו.



Adrien-Marie Legendre

(1752-1833)

מעבר מקטע [-1,1] לקטע [a, b]

על מנת לעבור לקטע [a, b] כלשהו נבצע את הטרנספורמציה הבאה:

$$z = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{b-a}z - \frac{b+a}{b-a}$$

באמצעות נוסחה זו ניתן לבנות פולינומים אורתוגונלים בקטע [a, b] לפי מכפלה סקלרית רציפה $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

דוגמא:

נבחר $[a, b] = [0, 1]$ ונקבל (ע"י נוסחת המעבר: $x = 2z - 1$)

$[-1, 1]$	$[0, 1]$	<i>normalized</i> [0,1]
$\tilde{P}_0(x) = 1$	$P_0(z) = 1$	$\tilde{P}_0(z) = 1$
$\tilde{P}_1(x) = x$	$P_1(z) = 2z - 1$	$\tilde{P}_1(z) = z - \frac{1}{2}$
$\tilde{P}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$	$P_2(z) = (2z - 1)^2 - \frac{1}{3}$	$\tilde{P}_2(z) = z^2 - z + \frac{1}{6}$
$\tilde{P}_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$	$P_3(z) = (2z - 1)^3 - \frac{3}{5}(2z - 1)$	$\tilde{P}_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{5}z - \frac{1}{20}$

מכפלה פנימית של פונקציות : מקרה כללי

• מכפלה פנימית רציפה של שתי פונקציות היא

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

כאשר $w(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקצית משקל חיובית

• מכפלה פנימית על קבוצת נקודות $\{x_k\}_{k=0}^n$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^n w(x_k) f(x_k) g(x_k)$$

כאשר $w(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקצית משקל חיובית



תכונות של פולינומים אורתוגונליים

תכונה 1

אם $\{P_k\}_{k=0}^n$ קבוצה אורתוגונלית כך ש- $P_k(x) \neq 0$, אזי היא בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה :

יש להראות כי אם $\sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x) = 0$ אז $\alpha_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$.

נבצע מכפלה סקלארית של שני האגפים ב $P_k(x)$ ונקבל $\alpha_k \langle P_k, P_k \rangle = 0$

כלומר $\alpha_k = 0$ (עבור $P_k \neq 0$ לפי אקסיומות מ"פ $\langle P_k, P_k \rangle > 0$).

מ.ש.ל

כל פולינום $q_n(x)$ ממעלה $n \geq$ ניתן להציג, באופן יחיד, כצירוף ליניארי של $\{P_k\}_{k=0}^n$ כלומר

$$(1) \quad q_n(x) = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \dots + c_k P_k + \dots + c_n P_n$$

$$c_k = \frac{\langle q_n, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \quad \text{כאשר } (c_k \text{ מקדמים אלו נקראים } \underline{\text{מקדמי פוריה}})$$

הוכחה: $\{P_k\}_{k=0}^n$ היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית של $n+1$ פולינומים, ולכן היא מהווה בסיס במרחב הפולינומים ממעלה $n \geq$

$$(1) \quad c_k = \frac{\langle q_n, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \quad \text{המקדמים יתקבלו כתוצאה מהכפלת שני אגפי}$$

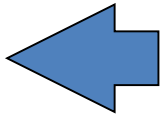
באופן סקלרי ב $P_k(x)$

תכונה 3

אם $\{P_k\}_{k=0}^n$ קבוצה של פולינומים אורתוגונליים ו- $q_m(x)$ פולינום כלשהו

ממעלה $m < n$ אזי $\langle P_n, q_m \rangle = 0$

הוכחה: על סמך תכונה 2 ניתן לרשום $q_m = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x)$.

ולכן $\langle P_n, q_m \rangle = \sum_{k=0}^m c_k \langle P_n, P_k \rangle = 0$  $\forall k = 0, 1, \dots, m < n: \langle P_n, P_k \rangle = 0$

מ.ש.ל

משפט בדבר השורשים של פולינומים אורתוגונליים - המקרה הרציף

אם $P_n(x)$ פולינום ממעלה n אשר אורתוגונאלי לכל פולינום ממעלה $n >$
כלומר $\int_a^b P_n(x)q_m(x)dx = 0$ לכל $q_m(x)$ ממעלה $n > m$

אזי כל השורשים של $P_n(x)$ הם ממשיים, פשוטים, ונמצאים בקטע (a,b)
הפתוח

הוכחה

נשים לב שבשורש פשוט יש שינוי סימן של הפולינום. כעת נניח בשלילה
כי $P_n(x)$ מחליף סימן בקטע (a,b) בנק' $r_1, r_2, \dots, r_m$ עבור $m < n$

נתבונן בפולינום ממעלה m הבא: $q_m(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_m)$

פולינום זה מחליף סימנים באותם נק' כמו $P_n(x)$ ולכן

המשך ההוכחה

$$P_n(x) \cdot q_m(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{או} \quad P_n(x) \cdot q_m(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

כלומר המכפלה $P_n(x) \cdot q_m(x)$ בעלת סימן קבוע ב $[a, b]$, ולכן

$$\int_a^b P_n(x) q_m(x) dx \neq 0$$

כאשר $m < n$ וזו בסתירה להנחת המשפט.

מ.ש.ל.

משפט: יחס הנסיגה בין פולינומים אורתוגונליים

תהי $\{\tilde{P}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ קבוצה של פולינומים אורתוגונליים מתוקנים, אזי

$$(1) \quad \tilde{P}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\tilde{P}_n(x) - \beta_n\tilde{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

כאשר

$$(2) \quad \alpha_n = \frac{\langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle}{\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle} \quad \beta_n = \frac{\langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n-1} \rangle}{\langle \tilde{P}_{n-1}, \tilde{P}_{n-1} \rangle} = \frac{\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle}{\langle \tilde{P}_{n-1}, \tilde{P}_{n-1} \rangle}$$

הוכחת המשפט

נתבונן בפולינום $x\tilde{P}_n(x)$ שהינו פולינום מתוקן ממעלה $n+1$ נציג אותו כצירוף ליניארי של $\{\tilde{P}_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$ (לפי תכונה 2)

$$(3) \quad x\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k \tilde{P}_k$$

$$(4) \quad c_k = \frac{\langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_k \rangle}{\langle \tilde{P}_k, \tilde{P}_k \rangle}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1$$

כאשר

$$(5) \quad \langle f \cdot g, h \rangle = \langle g, f \cdot h \rangle$$

נציין כי

ולכן (4) ניתן להצגה השקולה הבאה:

$$(4a) \quad c_k = \frac{\langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_k \rangle}{\langle \tilde{P}_k, \tilde{P}_k \rangle}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1$$

נעיר כי $x\tilde{P}_k(x)$ פולינום מתוקן ממעלה $n-1 \geq$ לכל $k=0,1,\dots,n-2$

ולכן (לפי תכונה 3) $\langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_k \rangle = 0$ לכל $k=0,1,\dots,n-2$

מכאן נובע כי
$$(6) \quad c_k = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,n-2$$

כעת נשווה מקדמים של x^{n+1} ב- (3) ונקבל
$$(7) \quad c_{n+1} = 1$$

נציב ערכי c_k שקבלנו בנוסחאות (6) ו- (7) בנוסחה (3) ונקבל:

$$x\tilde{P}_n = c_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(x) + c_n\tilde{P}_n(x) + \tilde{P}_{n+1}(x)$$

או באופן שקול:
$$(8) \quad \tilde{P}_{n+1}(x) = (x - c_n)\tilde{P}_n(x) - c_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(x)$$

הצגה זו שקולה להצגה (1) ע"י ההצבה
$$\beta_n = c_{n-1}, \quad \alpha_n = c_n$$

ושימוש בנוסחאות (4).

הערה : על מנת להוכיח את ההצגה השנייה עבור מספיק להראות β_n

$$\langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_{n-1} \rangle = \langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle \quad \text{או} \quad \langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n-1} \rangle = \langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle \quad \text{כי}$$

$$\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle - \langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_{n-1} \rangle = 0 \quad \text{או}$$

$$(9) \quad \langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n - x\tilde{P}_{n-1} \rangle = 0 \quad \text{או}$$

המשוואה (9) נכונה בשל העובדה כי $\tilde{P}_n - x\tilde{P}_{n-1}$ הוא פולינום ממעלה $n-1 \geq$ (שימוש בתכונה 3 מקודם).

בניית פולינומים אורתוגונליים: מקרה דיסקרטי

נתונה קבוצת נק' $X_1, X_2, \dots, X_N$ ברצוננו לבנות $\{\tilde{P}_k(x)\}_{k=0}^m$ קבוצת פולינומים אורתוגונלים על נק' אלה.

תהליך בנייה זה ידוע בשם תהליך האורתוגונליזציה של גרם שמידט ונתאר אותו להלן:

צעד 0: נגדיר $\tilde{P}_0(x) = 1$

צעד 1: כל פולינום מתוקן ממעלה 1 ניתן להצגה

$$\tilde{P}_1(x) = x - \alpha_0 \tilde{P}_0(x) = x - \alpha_0$$

כאשר α_0 קבוע כלשהו.

הקבוע α_0 נבחר כך ש- $\tilde{P}_0(x)$ ו- $\tilde{P}_1(x)$ אורתוגונלים ביחס לקבוצת

הנקודות $\{X_k\}_{k=1}^N$

כלומר נדרוש:

$$\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_1 \rangle = \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0(x_k) \cdot \tilde{P}_1(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0(x_k) \cdot (x_k - \alpha_0 \tilde{P}_0(x_k)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N x_k \tilde{P}_0(x_k) = \alpha_0 \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0^2(x_k)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \tilde{P}_0(x_k)}{\sum_{k=1}^N \tilde{P}_0^2(x_k)} = \frac{\langle x \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle}$$

קבלנו אם כן,

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N}$$

$$\tilde{P}_0(x) = 1$$

$$\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle = \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0^2(x_k) = \sum_{k=1}^N 1 = N$$

$$\langle x \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle = \sum_{k=1}^N x_k \tilde{P}_0^2(x_k) = \sum_{k=1}^N x_k$$

$$\alpha_0 = \frac{\langle x \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle}$$

הערה: אם קבוצת הנקודות $\{x_k\}_{k=1}^N$ סימטרית ביחס לראשית אזי $\sum_{k=1}^N x_k = 0$ ולכן $\boxed{\alpha_0 = 0}$.

צעד 2: כל פולינום מתוקן ממעלה 2 ניתן להצגה:

$$\tilde{P}_2(x) = (x - \alpha_1)\tilde{P}_1(x) - \beta_1\tilde{P}_0(x)$$

עבור קבועים כלשהם α_1 ו- β_1 .

הקבועים α_1 ו- β_1 נבחרים כך ש- $\tilde{P}_2(x)$ אורתוגונלי ל- $\tilde{P}_0(x)$ וגם ל- $\tilde{P}_1(x)$ ביחס לקבוצת הנקודות $\{x_k\}_{k=1}^N$.

$$\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_2 \rangle = \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0(x_k) \cdot \tilde{P}_2(x_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^N \tilde{P}_0(x_k) \cdot [(x_k - \alpha_1) \tilde{P}_1(x_k) - \beta_1 \tilde{P}_0(x_k)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0(x_k) \cdot [x_k \tilde{P}_1(x_k) - \beta_1 \tilde{P}_0(x_k)] = \alpha_1 \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0(x_k) \tilde{P}_1(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N x_k \tilde{P}_1(x_k) \tilde{P}_0(x_k) = \beta_1 \sum_{k=1}^N \tilde{P}_0^2(x_k)$$

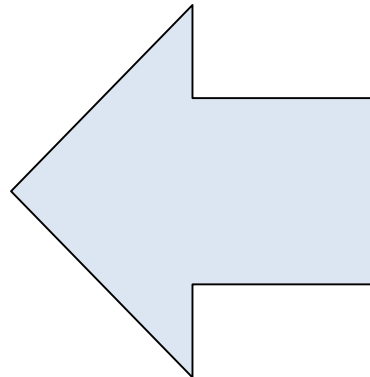
$$\Leftrightarrow \beta_1 = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \tilde{P}_1(x_k) \tilde{P}_0(x_k)}{\sum_{k=1}^N \tilde{P}_0^2(x_k)} = \frac{\langle x \tilde{P}_1, \tilde{P}_0 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle}$$



$$\beta_1 = \frac{\langle x \tilde{P}_1, \tilde{P}_0 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle}$$

כמו קודם

$$\beta_1 = \frac{\sum_{k=1}^N \tilde{P}_1^2(x_k)}{N}$$



$$\beta_1 = \frac{\langle x \tilde{P}_1, \tilde{P}_0 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle} = \frac{\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle}$$

כעת נמשיך עם הדרישה לאורתוגונליות של $\tilde{P}_1(x)$ ו- $\tilde{P}_2(x)$ על קבוצת הנקודות $\{x_k\}_{k=1}^N$.

$$\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 \rangle = \sum_{k=1}^N \tilde{P}_1(x_k) \cdot \tilde{P}_2(x_k) = 0 \quad \text{נדרוש:}$$

ובאופן שקול,

$$\sum_{k=1}^N \tilde{P}_1(x_k) \cdot \left[(x_k - \alpha_1) \tilde{P}_1(x_k) - \beta_1 \tilde{P}_0(x_k) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \tilde{P}_1(x_k) \cdot \left[x_k \tilde{P}_1(x_k) - \alpha_1 \tilde{P}_1(x_k) \right] = \beta_1 \sum_{k=1}^N \tilde{P}_1(x_k) \tilde{P}_0(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N x_k \tilde{P}_1^2(x_k) = \alpha_1 \sum_{k=1}^N \tilde{P}_1^2(x_k)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \tilde{P}_1^2(x_k)}{\sum_{k=1}^N \tilde{P}_1^2(x_k)} = \frac{\langle x \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle}{\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle}$$



$$\alpha_1 = \frac{\langle x \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle}{\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle}$$

באופן דומה אפשר להמשיך ולקבל

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\tilde{P}_n(x) - \beta_n\tilde{P}_{n-1}(x)$$

כאשר,

$$\alpha_n = \frac{\langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle}{\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle}$$

$$\beta_n = \frac{\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle}{\langle \tilde{P}_{n-1}, \tilde{P}_{n-1} \rangle}$$

הערה : קבוצת הפולינומים האורתוגונלים $\{\tilde{P}_k(x)\}_{k=0}^m$ שבונים עבור הטבלה $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ תלויה רק בנקודות $\{x_k\}_{k=1}^N$ ולא בערכי הפונקציה בנקודות אלו.

לדוגמא:

קבוצת הפולינומים האורתוגונלים שנבנה עבור הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2

לא תהיה שונה מזו שנבנה עבור הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	4	8	4	8	4

דוגמא

נתונה הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2

1. מצאו שלושה פולינומים אורתוגונלים על קב' הנקודות הנ"ל.
2. חשבו בעזרת פולינומים אלה את הפולינום $\tilde{Q}_2(x)$ שהוא המקרב הטוב ביותר לטבלה במובן הריבועים המינימאליים.

$$\tilde{P}_0(x) = 1$$

$$\tilde{P}_1(x) = x - \alpha_0 \quad \alpha_0 = \frac{\sum_{k=1}^5 x_k}{5} = \frac{-2-1+0+1+2}{5} = 0 \Rightarrow \tilde{P}_1(x) = x$$

$$\tilde{P}_2(x) = (x - \alpha_1) \tilde{P}_1(x) - \beta_1 \tilde{P}_0(x)$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle x \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle}{\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle} = \frac{\sum_{k=1}^5 x_k P_1^2(x_k)}{\sum_{k=1}^5 P_1^2(x_k)} = \frac{\sum_{k=1}^5 x_k^3}{\sum_{k=1}^5 x_k^2} = \frac{-8-1+0+1+8}{4+1+0+1+4} = 0$$

$$\beta_1 = \frac{\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle} = \frac{\sum_{k=1}^5 x_k^2}{N} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

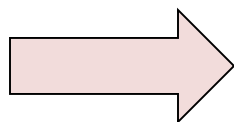
$$\tilde{P}_2(x) = x^2 - 2$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2
$\tilde{P}_0$	1	1	1	1	1
$\tilde{P}_1$	-2	-1	0	1	2
$\tilde{P}_2$	2	-1	-2	-1	2

$$c_0 = \frac{\langle y, \tilde{P}_0 \rangle}{\langle \tilde{P}_0, \tilde{P}_0 \rangle} = \frac{7}{5}$$

$$c_1 = \frac{\langle y, \tilde{P}_1 \rangle}{\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}_1 \rangle} = 0$$

$$c_2 = \frac{\langle y, \tilde{P}_2 \rangle}{\langle \tilde{P}_2, \tilde{P}_2 \rangle} = \frac{2}{7}$$



$$Q_2(x) = \frac{7}{5} + \frac{2}{7}(x^2 - 2) = \frac{29}{35} + \frac{2}{7}x^2$$

טבלת פולינומים אורתוגונליים ידועים

שם	סימון	קטע	פונקצית משקל	פולינומי המשפחה
Legendre	P_k	$[-1,1]$	1	$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ Recursion formula : $\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x \\ (k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0 \end{cases}$
Chebyshev I	T_k	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_2(x) = 2x^2 - 1$ $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ Recursion formula : $\begin{cases} T_0(x) = 1, & T_1(x) = x \\ T_{k+1}(x) - 2xT_k(x) + T_{k-1}(x) = 0 \end{cases}$

טבלת פולינומים אורתוגונליים ידועים

שם	סימון	קטע	פונקציית משקל	פולינומי המשפחה
Chebyshev II	U_k	$[-1,1]$	$\sqrt{1-x^2}$	$U_0(x) = 1$ $U_1(x) = 2x$ $U_2(x) = 4x^2 - 1$ $U_3(x) = 8x^3 - 4x$ Recursion formula : $\begin{cases} U_0(x) = 1, & U_1(x) = 2x \\ U_{k+1}(x) - 2xU_k(x) + U_{k-1}(x) = 0 \end{cases}$
Laguerre	L_k	$[0, \infty)$	e^{-x}	$L_0(x) = 1$ $L_1(x) = -x + 1$ $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$ $L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$ Recursion formula : $\begin{cases} L_0(x) = 1, & L_1(x) = -x + 1 \\ (k+1)L_{k+1}(x) - (2k+1-x)L_k(x) + kL_{k-1}(x) = 0 \end{cases}$

טבלת פולינומים אורתוגונליים ידועים

שם	סימון	קטע	פונקצית משקל	פולינומי המשפחה
Hermite	H_k	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$H_0(x) = 1$ $H_1(x) = x$ $H_2(x) = x^2 - 1$ $H_3(x) = x^3 - 3x$ Recursion formula : $\begin{cases} H_0(x) = 1, H_1(x) = x \\ H_{k+1}(x) - xH_k(x) - kH_{k-1}(x) = 0 \end{cases}$

ליניאריזציה של משוואות הקירוב

(1) נניח כי בניסוי נמדדו n ערכי הפונקציה וידוע שהפונקציה מתנהגת כ-

$$f(x) = b_0 e^{b_1 x}$$

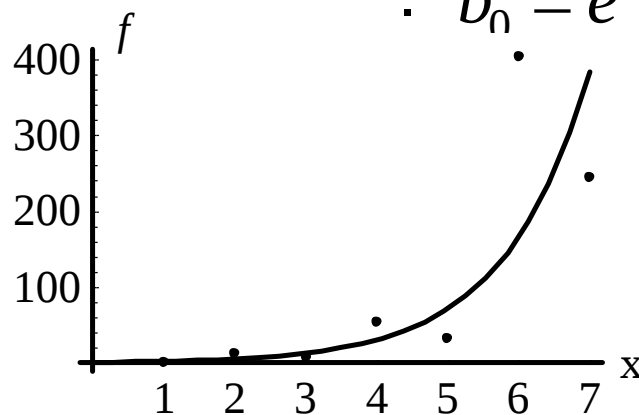
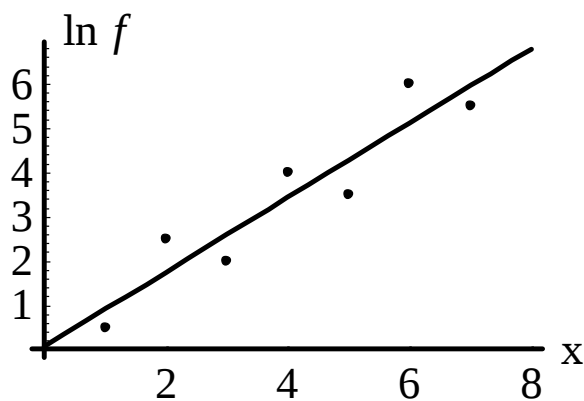
דרוש למצוא את המקדמים b_0, b_1 כך שהקירוב ע"י הפונקציה יהיה הכי קרוב לנקודות המדידה. ניקח $\ln$ משני האגפים של המשוואה:

$$\ln f(x) = \ln(b_0 e^{b_1 x}) = \underbrace{\ln b_0}_{a_0} + \underbrace{b_1}_{a_1} x$$

נסמן $\ln f(x_i) \equiv y_i$ ונקבל משוואת קו המגמה

$$y_i = a_0 + a_1 x_i$$

המקדמים a_0, a_1 ניתן למצוא לפי הנוסחאות של קו המגמה ואחר כך לחשב $b_0 = e^{a_0}$.



ליניאריזציה של משוואות הקירוב

(2) נניח כי הפונקציה מתנהגת כ $f(x) = c_0 x^{c_1}$. גם במקרה הזה נשתמש בהתמרה לוגריתמית:

$$\ln f(x) = \ln(c_0 x^{c_1}) = \underbrace{\ln c_0}_{a_0} + \underbrace{c_1}_{a_1} \underbrace{\ln x}_{\xi}$$

כמו במקרה הקודם נסמן $\ln f(x_i) \equiv y_i$ ושוב נקבל משוואת קו המגמה

$$y_i = a_0 + a_1 \xi_i$$

דוגמה: דרוש לקרב את הנתונים שבטבלה ע"י הפונקציה $f(x) = c_0 x^{c_1}$

	x	$f(x)$	$\xi = \ln x$	$y = \ln f$	ξ^2	$\xi \cdot y$
$a_1 = \frac{1.51 - 0.957 \cdot 0.986}{1.24 - 0.957^2} = 1.748$	1	0.5	0	-0.693	0	0
	2	1.7	0.693	0.531	0.480	0.368
$a_0 = 0.986 - 1.748 \cdot 0.957 = -0.688$	3	3.4	1.099	1.224	1.208	1.345
	4	5.7	1.386	1.740	1.921	2.412
$c_0 = e^{-0.688} \approx 0.5$	5	8.4	1.609	2.128	2.589	3.424
			0.957	0.986	1.240	1.510

$$f(x) = 0.5 x^{1.75}$$

ליניאריזציה של משוואות הקירוב

(3) נניח כי הפונקציה מתנהגת כ $f(x) = d_0 \frac{x}{d_1 + x}$.

נבצע התמרה:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{d_0} \left(\frac{d_1}{x} + 1 \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{d_0}, \quad z = \frac{1}{x}, \quad a_1 = \frac{d_1}{d_0}, \quad y_i = \frac{1}{f(x_i)}$$

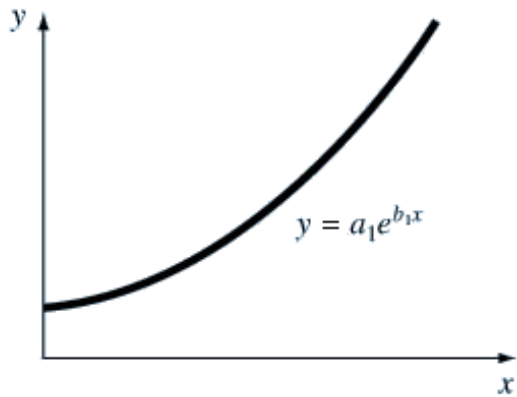
ושוב נקבל את משוואת קו המגמה

$$y_i = a_0 + a_1 z_i$$

את המקדמים a_1, a_0 נמצא לפי הנוסחאות של קו המגמה ואחר כך נחשב

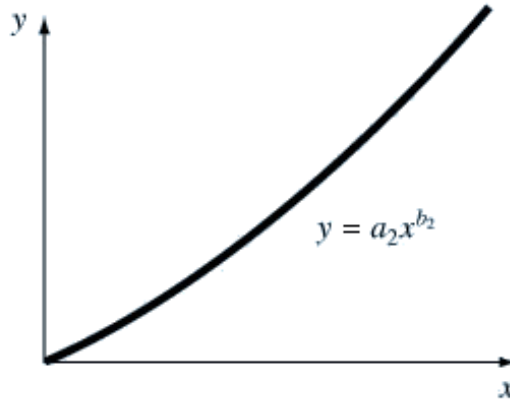
$$d_0 = \frac{1}{a_0}, \quad d_1 = \frac{a_1}{a_0}$$

ליניאריזצית פונקציות לא ליניאריות



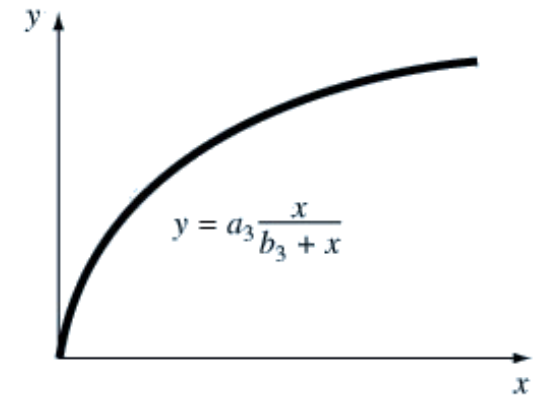
(a)

Linearization



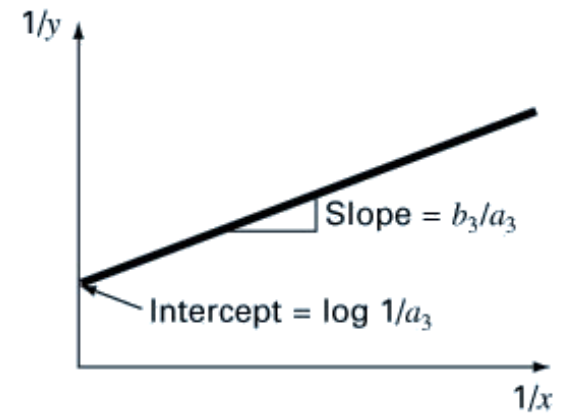
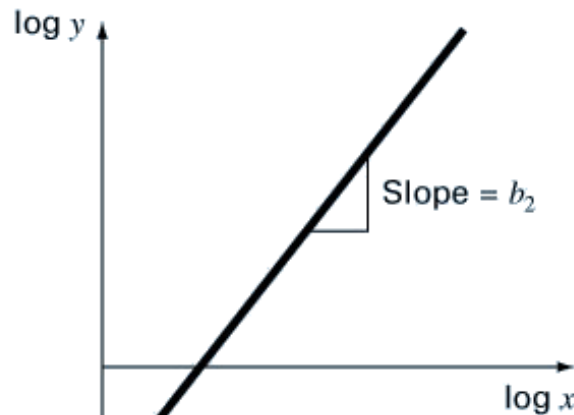
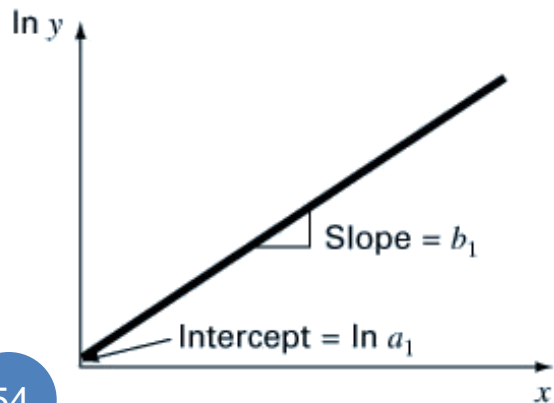
(b)

Linearization



(c)

Linearization



ליניאריזצית פונקציות לא ליניאריות

$$y = \alpha_1 e^{\beta_1 x} \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln \alpha_1 + \beta_1 x$$

use $(x_i, \ln y_i)$ instead of (x_i, y_i)

$$y = \alpha_2 x^{\beta_2} \Rightarrow$$

$$\log y = \log \alpha_2 + \beta_2 \log x$$

use $(\log x_i, \log y_i)$ instead of (x_i, y_i)

$$y = \alpha_3 \frac{x}{\beta_3 + x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{\alpha_3} + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \left(\frac{1}{x} \right)$$

use $\left(\frac{1}{x_i}, \frac{1}{y_i} \right)$ instead of (x_i, y_i)

$$y = \frac{1}{\alpha_4 x + \beta_4} \Rightarrow \frac{1}{y} = \alpha_4 x + \beta_4$$

use $\left(x_i, \frac{1}{y_i} \right)$ instead of (x_i, y_i)

ריבועים מינימאליים – פתרון מטריציאוני

נזכר בצורה כללית של בעיית הקירוב

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i) & \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) \\ \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) & \sum_{i=1}^n \varphi_1^2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) & \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n \varphi_m^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_i) f(x_i) \\ \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) f(x_i) \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n \varphi_m(x_i) f(x_i) \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \cdots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_m(x_1) & \varphi_m(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $A = Q \cdot Q^T$, כאשר

$$(Q \cdot Q^T) \begin{pmatrix} a_0 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} = (Q) \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

והמערכת נראית כך:

דוגמה: דרוש לקרב את הנתונים שבטבלה

x	1	2	3	4
$f(x)$	2.0	2.2	3.2	3.4

ע"י הפונקציה $y(x) = \frac{a}{x} + b \ln(1+x)$

פיתרון. פונקציות הבסיס כאן $\varphi_0(x) = \frac{1}{x}, \varphi_1(x) = \ln(1+x)$

נבנה מטריצת Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \ln(1+1) & \ln(1+2) & \ln(1+3) & \ln(1+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \frac{1}{3} & 0.25 \\ 0.693 & 1.098 & 1.386 & 1.609 \end{pmatrix}$$

נחשב את $Q \cdot Q^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \frac{1}{3} & 0.25 \\ 0.693 & 1.098 & 1.386 & 1.609 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.693 \\ 0.5 & 1.098 \\ \frac{1}{3} & 1.386 \\ 0.25 & 1.609 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.424 & 2.107 \\ 2.107 & 6.188 \end{pmatrix}$$

והאגף הימין:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \frac{1}{3} & 0.25 \\ 0.693 & 1.098 & 1.386 & 1.609 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.2 \\ 3.2 \\ 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.017 \\ 13.712 \end{pmatrix}$$

נקבל מערכת המשוואות:

$$1.424a + 2.107b = 5.017$$

$$2.107a + 6.188b = 13.712$$

הפיתרון: $a = 0.504$, $b = 2.04$