שיעור 9

דטרמיננטה של מטריצה

דטרמיננטות מסדרים אחת ושתיים

הדטרמיננטות מסדרים אחת ושתיים מוגדרות כלהלן:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

דוגמא

$|A| = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 5 \Leftarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

דוגמא לשימוש

ניתן להיעזר בדטרמיננטה על מנת לפתור מערכת משוואות.

נניח ש $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ מערכת משוואות. נשים לב שיש למערכת פתרון יחיד רק אם $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \overset{a_{21}R_1 - a_{11}R_2 \to R_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} & a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \end{array}\right).$$

פתרון המערכת: $y = \dfrac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}} = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$.

נציב את הפתרון במשוואה הראשונה ונקבל

$$a_{11}x + \frac{a_{12}\left(a_{11}b_2 - a_{21}b_1\right)}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = b_1 \Rightarrow a_{11}\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)x + a_{12}\left(a_{11}b_2 - a_{21}b_1\right) = b_1\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)$$

$$x = \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{21}a_{12} - a_{12}a_{11}b_2 + a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)} \Rightarrow x = \frac{b_1a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11}b_2}{a_{11}\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)} \Rightarrow x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

סימונים

- נסמן את דטרמיננטת המקדמים ב D.
- נסמן את הדטרמיננטה המתקבלת ע"י החלפת עמודת הקבועים בטור מקדמי הנעלם x ב N_x.
- נסמן את הדטרמיננטה המתקבלת ע"י החלפת עמודת הקבועים בטור מקדמי הנעלם x ב N_x.

ניתן לפתור את המשוואה $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ בעזרת דטרמיננטות כאשר $x = \dfrac{N_x}{D}, y = \dfrac{N_y}{D}$.

דוגמא

נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$.

נחשב תחילה את D, N_x, N_y.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D=1\cdot 1-(-2)\cdot 1=3$$

$$N_x=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4\cdot 1-(-2)\cdot 1=6$$

$$N_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-4\cdot 1=-3$$

$$x=\frac{N_x}{D}=\frac{6}{3}=2$$
$$y=\frac{N_y}{D}=\frac{-3}{3}=-1 .$$

דטרמיננטה מסדר 3

תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה. המינור ה i,j של A הוא המטריצה $A_{ij}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ המתקבלת מ A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j.

דוגמא

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. $A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, A_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

חישוב דטרמיננטה בעזרת שורה כלשהי

תהא $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ ונבחר שורה כלשהי i (בד"כ נבחר את השורה עם הכי הרבה אפסים)

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|+(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|+(-1)^{i+3}a_{i3}|A_{i3}| .$$

דוגמא

נרצה לחשב את הדטרמיננטה של המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

בשורה השנייה יש הכי הרבה אפסים ולכן כדאי לבחור בשורה השנייה.

$$|A|=(-1)^3\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+(-1)^4\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}+(-1)^5\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=8 .$$

חישוב דטרמיננטה בעזרת עמודה כלשהי

תהא $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ ונבחר עמודה כלשהי j (בד"כ נבחר את העמודה עם הכי הרבה אפסים)

$$|A|=(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|+(-1)^{j+2}a_{2j}|A_{2j}|+(-1)^{j+3}a_{3j}|A_{3j}| .$$

<u>דוגמא לשימוש</u>

כמו מקודם ניתן להיעזר בדטרמיננטה מסדר 3 כדי לפתור מערכת עם שלוש משוואות ושלושה נעלמים.

<u>הערה</u>

למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד רק אם $|A|\neq 0$ והפתרון הוא $x=\frac{N_x}{D}, y=\frac{N_y}{D}, z=\frac{N_z}{D}$.

<u>דוגמא</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ y+z=0 \\ 3y-z=4 \end{cases}$.

נחשב את D, N_x, N_y, N_z.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-8.$$

$$N_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-16+8=-8.$$

$$N_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-8.$$

$$N_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=8.$$

פתרון המשוואה הוא $x=\frac{N_x}{D}=1, y=\frac{N_y}{D}=1, z=\frac{N_z}{D}=-1$.

<u>פיתוח דטרמיננטה באופן כללי</u>

א. פיתוח לפי שורה i: $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$.

ב. פיתוח לפי עמודה j: $|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$.

<u>כלל קרמר</u>

תהיי נתונה מערכת של n משוואות ליניאריות ב n נעלמים $Ax=b$, תהי A_i המטריצה המתקבלת מהחלפת העמודה ה i-ית של A בווקטור העמודה b. נסמן $N_i=|A_i|, D=|A|$ כאשר $1\le i\le n$.

למערכת המשוואות $Ax=b$ יש פתרון יחיד אם ורק אם $D\neq 0$. במקרה זה הפתרון היחיד הוא $x_i=\frac{N_i}{D}$.

<u>פיתוח דטרמיננטה בעזרת פעולות אלמנטאריות</u>

שני המשפטים הבאים יתנו לנו כלים לחשב דטרמיננטה בעזרת שימוש בפעולות שורה אלמנטאריות

<u>משפט 1</u>

א. אם ל A יש שורת (עמודת) אפסים, אז $|A|=0$.

ב. אם ל A יש שתי שורות (עמודות) זהות, אז $|A|=0$.

ג. אם A משולשת, כלומר, ל A יש אפסים מעל או מתחת לאלכסון, אז $|A|$ שווה למכפלת איברי האלכסון של A.

משפט 2

ע"י פעולת שורה (עמודה) אלמנטארית. A מתקבלת מ B נניח ש

א. אם הוחלפו שתי שורות (עמודות) של A ביניהן, אז $|B|=-|A|$.

ב. אם הוכפלה שורה (עמודה) של A בסקלר α, אז $|B|=\alpha|A|$.

ג. אם הוספה כפולה של שורה (עמודה) לשורה (עמודה) אחרת, אז $|B|=|A|$.

הערה

בעזרת המשפט השני ניתן לדרג את המטריצה בעזרת פעולות שורה אלמנטאריות ולדעת כיצד הפעולה השפיע על התוצאה.

לאחר הדירוג נשתמש במשפט הראשון כדי לקבל את הדטרמיננטה.

תרגיל

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&0&3&1\\2&-1&0&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}$$

פתרון

נדרג את המטריצה ונרשום כיצד כל פעולה השפיעה על הדטרמיננטה

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&0&3&1\\2&-1&0&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}\underset{\substack{-2R+R_2\to R_2\\-2R_1+R_3\to R_3\\-2R_1+R_4\to R_4}}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&-4&-3&3\\0&-5&-6&3\\0&-3&-5&3\end{pmatrix}\underset{\substack{-\frac{5}{4}R_2+R_3\to R_3\\-\frac{3}{4}R_2+R_4\to R_4}}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&-4&-3&3\\0&0&\frac{-9}{4}&\frac{-3}{4}\\0&0&\frac{-11}{4}&\frac{-3}{4}\end{pmatrix}$$

הפעולות הנ"ל לא שינו את התוצאה של הדטרמיננטה

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&-4&-3&3\\0&0&\frac{-9}{4}&\frac{-3}{4}\\0&0&\frac{-11}{4}&\frac{-3}{4}\end{pmatrix}\underset{C_3\leftrightarrow C_4}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-4&3&-3\\0&0&\frac{-3}{4}&\frac{-9}{4}\\0&0&\frac{-3}{4}&\frac{-11}{4}\end{pmatrix}\underset{R_3-R_4\to R_4}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-4&3&-3\\0&0&\frac{-3}{4}&\frac{-9}{4}\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

כל פעולה הכפילה את ערך הדטרמיננטה פי 1- ולכן הערך לא השתנה.

קיבלנו מטריצה משולשית עליונה ולכן הדטרמיננטה הוא מכפלת איברי האלכסון במטריצה שהוא $1\frac{1}{2}$.

מטריצה צמודה

המטריצה הצמודה של המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, המסומנת ב $adjA$, היא המשוחלפת של מטריצת המשלימים האלגבריים של A :

$$adjA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ A_{1n} & . & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix} .$$

דוגמא

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ המשלימים האלגבריים של תשעת הרכיבים של A הם:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2; A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11; A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

השחלוף של מטריצת המשלימים שלעיל נותן את המטריצה הצמודה של A :

$$adjA = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} .$$

משפט

עבור כל מטריצה ריבועית A , $A\cdot(adjA) = (adjA)\cdot A = |A|\cdot I$.

אם $|A| \neq 0$ אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)$.

הערה

בעזרת המשפט הנ"ל ניתן לקבל דרך נוספת לחשב את המטריצה ההופכית.

דוגמא

נחשב בעזרת המשפט את המטריצה ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

נחשב את הדטרמיננטה של A . $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2\cdot(-18) + 3\cdot 2 + (-4)\cdot 4 = -46$

$$A^{-1} = \frac{-1}{46}\cdot\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} .$$