....

א. ....

הראינו כי כל איברי הקבוצה $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\middle|E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I\right\}$ גדולים מ$|E|=b-a$. ע"פ הגדרת inf:

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\middle|E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}\geq b-a$$

$$m^*(E)\geq|E|$$

ב. אם E קטע חסום כלשהו(למשל $(a,b]$) אזי עבור $\varepsilon>0$ נתון ישנו קטע סגור $F\subseteq E$ המקיים $|F|\geq|E|-\varepsilon$. לכן

$$|E|-\varepsilon\leq|F|=m^*(F)\leq m^*(E)\leq m^*(E)=\left|\overline{E}\right|=|E|$$

נשאיף $\varepsilon\to0^+$ לקבל

$$|E|\leq m^*(E)\leq|E|\implies m^*(E)=|E|$$

ג. E קטע לא חסום(למשל $(0,\infty)$ או $\mathbb{R}$). במקרה זה יש להוכיח $m^*(E)=+\infty$:

$(\leq)$ ברור!

$(\geq)$ נניח בה"כ כי E לא חסום מימין, כלומר E מכיל קרן מהצורה (a,∞). אם כך, הקטעים $F_m:=(a,a+M)$ מוכלים בE לכל $M>0$. ע"פ מונוטוניות של m^*, $\forall_{M>0}m^*(F_m)\leq m^*(E)$. נשאיף $M\to+\infty$ לקבל $m^*(E)\geq\infty$.

תרגיל

הוכיחו כי אם $m^*(A)=0$ אזי $m*(A\cup B)=m^*(B)$.

הוכחה

$(\geq)$ $A\cup B\supseteq B$ ולכן לפי מונוטוניות $m^*(A\cup B)\geq m^*(B)$.

$(\leq)$ ע"פ תת־חיבוריות "השלם קטן מסכום חלקיו" - $m^*(A\cup B)\leq\cancel{m^*(A)}+m^*(B)$

למה

אם $E\subseteq\mathbb{R}$ בת־מנייה אזי $m^*(E)=0$.

הוכחה

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מנייה של E(כלומר $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$). כעת:

$$0 \le m^*(E) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\{x_n\}) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m^*(E) = 0$$

תרגיל

תהי A קבוצת האי־רציונלים בקטע $[0,1]$. הוכיחו כי $m^*(A) = 1$.

הוכחה

נסמן את קבוצת הרציונלים בקטע $[0,1]$ ע"י B. אם כך:

$$1 = m^*([0,1]) = m^*\left(A \cup \overset{m^*(B)=0}{B}\right) = m^*(A)$$

$$\blacksquare$$

תרגיל

תהי B קבוצת הרציונליים בקטע $[0,1]$ ותהי $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ קבוצה <u>סופית</u> של קטעים פתוחים המכסה את B. הוכיחו כי $\sum\limits_{k=1}^{n} m^*(I_k) \ge 1$.

פתרון

מלוכלך: יהי $(a_1, b_1) \in \{I_k\}$ קטע המכסה את 0($0 \in (a_1, b_1)$). בהינתן הקטעים $(a_1, b_1), \ldots (a_k, b_k)$ נמשיך באופן הבא:

i. אם $1 \in (a_k, b_k)$ נעצור.

ii. אם $b_k \le 1$ לא סיימנו לכסות ונחלק למקרים:

א. $b_k \in \mathbb{Q}$ - מוכרח להיות קטע נוסף המכסה את b_k: $b_k \in (a_{k+1}, b_{k+1})$

ב. $b_k \notin \mathbb{Q}$ 0 עלול להיות מצב שאין קטע שמכסה את b_k אבל חייב להיות קטע שמתחיל בו(כי לא יכול להיות רווח).

נמשיך כך עד שנגיע ל1.

כיסינו את הקטע $(0,1)$ פרט אולי לקבוצה סופית של "נקודות חיבור אי רציונליות".
נסמן קבוצה זו ע"י F.

כעת:

$$1 = m^*([0,1]) \le m^*\left(\overset{m^*(F)=0}{F} \cup \bigcup_{p=1}^{k}(a_p,b_p)\right) =$$

$$= m^*\left(\bigcup_{p=1}^{k}(a_p,b_p)\right) \le m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} m^*(I_k)$$

נקי: $\overline{B}=[0,1]$(כי $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ צפופה ב$[0,1]$), ולכן

$$1 = m^*([0,1]) = m^*\left(\overline{B}\right) \overset{B\subseteq\bigcup I_k \Longrightarrow \overline{B}\subseteq\overline{\bigcup I_k}}{\le} m^*\left(\overline{\bigcup I_k}\right) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{I}_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} m^*(I_k) = \sum_{k=1}^{n} m^*(I_k)$$

הערה

תרגיל זה מסביר למה הגדרת m^* לוקחים מספר בן־מנייה של קטעים בכיסוי.
אם נקבל מספר סופי נקבל $m^*(\mathbb{Q}\cap[0,1]) \ge 1$, אבל רוצים $m^*(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0$.

משפט חשוב ־ אפיון של קבוצות פתוחות ב$\mathbb{R}$

כל קבוצה פתוחה $O\subseteq\mathbb{R}$ היא איחוד בן מנייה של קטעים פתוחים זרים הדדית.
(כלומר ישנה סדרת קטעים פתוחים זרים הדדית I_n כך ש$O=\biguplus_{n=1}^{\infty} I_n$)

הוכחה

תהי $O\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה. לכל $x\in O$ יהי I_x הקטע הפתוח הגדול ביותר המקיים $x\in I_x\subseteq O$.
(בעצם I_x הוא בדיוק רכיב הקשירות המכיל את x)

נניח $x,y\in O$ ו$I_x\cap I_y\neq\emptyset$. אזי $I_x\cup I_y$ הוא גם קטע פתוח, ומתקיים $I_x\subseteq I_x\cup I_y$ וגם $I_y\subseteq I_x\cup I_y$. אבל ע"פ הגדרת I_x,I_y $I_x=I_x\cup I_y$ וגם $I_y=I_x\cup I_y$, וזה אומר ש$I_x=I_y$.

המסקנה היא ש$C=\{I_x\}_{x\in O}$ מהווה חלוקה של O, ולכן נוכל לרשום $O=\biguplus_{I\in C} I$.

נשים לב שכל קטע I בC מכיל מספר רציונלי $q_I\in\mathbb{Q}$. נגדיר העתקה $f:C\to\mathbb{Q}$ ע"י $f(I)=q_I$. f הזו היא חח"ע כי שני קטעים זרים לא יכולים להכיל את אותו מספר רציונלי.
זה אומר ש$|C|\le|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

■

הגדרה

נאמר כי קבוצה $G \subseteq \mathbb{R}$ היא G_δ אם היא חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.
(כלומר קיימות קבוצות פתוחות O_n עבורן $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n$)

תרגיל

הוכיחו כי בהנתן $A \subseteq \mathbb{R}$ ו-$\varepsilon > 0$ כלשהם, קיימת קבוצה פתוחה O כך ש-$A \subseteq O$ ומתקיים $m^*(O) \leq m^*(A) + \varepsilon$.

הוכחה

אם $m^*(A) = +\infty$ - ברור! ולכן נניח $m^*(A) < \infty$.

כזכור, $m^*(A) = \inf\left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| \middle| A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$, וע"פ הגדרת ה-inf נוכל למצוא כיסוי של A ע"י קטעים פתוחים $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon$$

כעת:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon$$

$O = \bigcup\limits_{n=}^{\infty} I_n$ קבוצה פתוחה(איחוד של קבוצות פתוחות)

$$m^*(O) \leq m^*(A) + \varepsilon$$

$\blacksquare$