17.1.16.

<u>תורת הקבוצות</u>

<u>תרגול 11</u>

<u>טענה:</u> קיימות שבית שבטלות של שבית.

<u>תזכורת:</u> (למת פודור). (עובד יונים).

$f:\alpha\to\alpha$ נקראת דוחסת אם לכל $\beta<\alpha$, $f(\beta)<\beta$.

הלמה אומרת של S שבית

ב- α ו- $f:S\to\alpha$ פונקציה דוחסת

יש $T\subseteq S$ שבית כך ש- $f\restriction T$ קבועה.

<u>הוכחה:</u> נעזר בלמה, ונגדיר $C=\{$אורדינלים גבוליים ב- $\omega_1\}$

C שבית (כי כל סגורה יש גבולי)

לכל $\alpha\in C$ יש סדרה (עולה) $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ כך ש- $\lim\alpha_i=\alpha$

(משתמשים כבר ב- A.C, בבחירת הסדרה).

נגדיר ω פונקציות: $f_i:C\to\omega_1$

$f_i(\beta)=\beta_i$ (לכל $\beta\in C$ גבולי ולכן יש לו β_i שהוא β לאיבר ה- i בסדרה שבחרנו).

f_i דוחסת שכן $\forall\beta\in C\ f_i(\beta)<\beta$

מהלמה הנ"ל קיימת $T_i\subseteq C$ קבוצה <u>שבית</u>

כך ש- $f_i\restriction T_i$ פונקציה קבועה.

כלומר $T_i=\{\alpha\in C / f_i(\alpha)=t\}$.

נראה שקיים i כך ש- T_i^c גם שבית!

נניח בשלילה שלא. כלומר לכל i. T_i^c איננה שבית.

כלומר לכל i יש סגור S_i כך ש- $S_i\cap T_i^c=\emptyset$

$\Rightarrow$ $S_i\subseteq T_i$. $\Rightarrow$ $\bigcap S_i\subseteq\bigcap T_i$ סגור.

אך $\bigcap T_i=\{\alpha\in C / \forall i\ f_i(\alpha)=t_i\}$

אבל t_i הוא האיבר ה- i בסדרה של α.

ולכן $\bigcap T_i\subseteq\lim t_i$ ולכן $\bigcap T_i$ לכל היותר קבוצה

בת איבר אחד, וזה לא יכול להכיל סגור! סתירה.

<u>מ.ש.ל!</u>

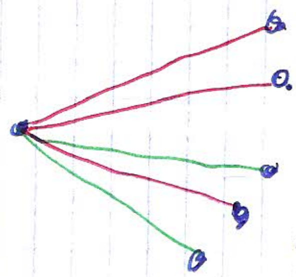
נשים לב שאנחנו יודעים קיום של קבוצה T_i שבתית כך
ש- T_i^c גם שבתית, אבל אין לנו דרך להצביע
על צא׳ ב- T_i. וזה קורה בגלל השימוש ב- A.C.

<u>דוגמא:</u> ניתן דוגמא ל- $A\subseteq\omega_1$ <u>שאינה שבתית</u>
ופונקציה מקטינה $f:A\to\omega_1$ כך שהמקור של כל
איבר ב- ω_1 אינו שבתי.

תהיה $A\subseteq\omega_1$. כלומר יש C סגור כך ש- $A\cap C=\emptyset$.
נגדיר $f:A\to\omega_1$ ע"י, לכל $\alpha\in A$ $f(\alpha)=\sup(C\cap\alpha)$
נשים לב שבגלל ש- C סגורה $f(\alpha)\in C$.
נשים לב ש- f <u>מקטינה</u> כי $f(\alpha)\leq\alpha$
אבל $\alpha\notin C$ ולכן $f(\alpha)\neq\alpha \Rightarrow f(\alpha)<\alpha$.
נראה שהמקור של כל איבר אינו שבתי.
יהי $\gamma\in\omega_1$. נראה ש- $f^{-1}(\gamma)$ אינו שבתי
C קופי׳ לכן יש $\gamma_1\in C$ כך ש- $\gamma<\gamma_1\in C$
אם $f(\alpha)=\gamma$ אז $\alpha\leq\gamma_1$
כי אם $\gamma_1<\alpha$ אז $\gamma_1\in C\cap\alpha$
ואז $\gamma=f(\alpha)=\sup(C\cap\alpha)\geq\gamma_1$ סתירה!
ולכן $\alpha\leq\gamma_1$. לכן $f^{-1}(\gamma)\leq\gamma_1$. לכן חסום!
כל קבוצה שבתית אינה חסומה, ולכן $f^{-1}(\gamma)$ לא שבתי!
והראנו שיש $f:\omega_1\to\omega_1$ דוחקת על A.
והמקור של ב- ω_1 שבתי!

<u>משפט:</u> (רמזי).
נתחיל מהמקרה הקל של שני צבעים:
לכל צביעה של הגרף השלם (כל שני קודקודים מחוברים בקשת)
על ω. הגרף יכיל גרף אינסופי שלם מונוכרומטי.

<u>הוכחה:</u> (אינטואיטיבית).


v_1

נבחר קודקוד v_1.
יוצאות ממנו קשתות
אדומות וירוקות לכל שאר
הקודקודים, בהכרח אחד מהצבעים
מופיע אינסוף פעמים (בה"כ <u>ירוק</u>).
נצמצם רק לקודקודים שמחוברים ל- v_1 בירוק.
נסמן אותם בקבוצה V_1.
אם יש $v_2 \in V_1$ שמתחבר ל- ∞ קודקודים אחרים
ב- V_1 בירוק, ניקח אותו.
נסמן כך את הקודקודים שמחוברים ל- v_2 בצבע ירוק V_2
ובעצם אינסופיים $V_2 \subseteq V_1$ נניח שתמיד אפשר
להמשיך ככה, ונקבל סדרה $V_\infty = \{v_i\}$
הוא יהיה גרף שמחפשנו, כי לכל $v_i, v_j \in V_\infty$,
נקבל $v_i, v_j \in V_{\min\{i,j\}}$ ובכל מקרה הם מחוברים בצבע ירוק.

אבל אם לא נוכל להמשיך כך תמיד. כלומר נגיע
לשלב בו יש לכל קודקוד חיבור למס' סופי עם הצבע ירוק.
נניח V_i כך שלא ניתן למצוא בו $v \in V_i$
שמחובר ל- ∞ קודקודים אחרים ב- V_i בצבע ירוק.
כלומר כל קודקוד ב- V_i מחובר למספר <u>סופי</u> של קודקודים
עם הצבע ירוק. כלומר לכל $v \in V_i$ יש מספר אין-סופי
של קודקודים שמחוברים אליו באדום. נבחר קודקוד כלשהו ב- V_i
ונתחיל שוב את התהליך איתו! בוודאות לא נתקע!