

① מכנה פנימי

1. האם ביטויים הבאים מהווים מכנה פנימי במרחב $C[-1,2]$?

(א) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 (f(t) + g(t)) dt$ X

(ב) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^2 f(t) \overline{g(t)} dt + \int_{-1/2}^1 g(t) \overline{f(t)} dt$ ✓

(ג) $\langle f, g \rangle = 3 \int_{-1}^2 f(t) \overline{g(t)} dt$ ✓

(ד) $\langle f, g \rangle = f(0) \overline{g(0)} + f(1) \overline{g(1)}$ X

הוכחה

$\langle u, u \rangle \geq 0$ & $\langle u, u \rangle = 0 \iff u=0$

$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

הוכחה

$\|x\| \geq 0$

$\|x\| = 0 \iff x=0$

$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2. האם אפשר להגדיר מכנה פנימי במרחב $C^2[-\pi, \pi]$ ע"י

$\langle f, g \rangle = f(-\pi) \overline{g(-\pi)} + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \overline{g''(x)} dx$ X

3. האם נוסחה

$\langle f, g \rangle = f(0) \overline{g(0)} + f'(0) \overline{g'(0)} + f(1) \overline{g(1)}$

היא מכנה פנימי במרחב $C^1[0,1]$ X

בגורמים $P_2 = \text{Span}(1, x, x^2)$ ✓

4. איזה מקין ביטויים הבאים מהווים מכנה פנימי

(א) $C^1[0,1]$ במרחב $\langle f, g \rangle = f(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 f'(t) \overline{g'(t)} dt$

(ב) $C^1[0,1]$ במרחב $\langle f, g \rangle = f(0) \overline{g(0)} + f'(1) \overline{g'(1)}$

(ג) X $C[0,1]$ במרחב $\langle f, g \rangle = 2 \int_0^{1/2} f(t) \overline{g(t)} dt - \int_{1/2}^1 f(t) \overline{g(t)} dt$

5. האם נוסחה עבור פונקציות $f, g \in C[a,b]$

כאשר $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$

$\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b |f(x) \overline{g(y)} - g(x) \overline{f(y)}|^2 dx dy = \|f\|^2 \|g\|^2 - |\langle f, g \rangle|^2$ [משפט בורסאק]

$|a|^2 = a \overline{a}$ ~~$|a|^2 \neq a \cdot a$~~