

מרצה: דר' ארז שיינר
משך המבחן: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק'
ענו על כל השאלות
כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{10})e^{\sin(7x)}}{(1-\cos(5x))^5}$ ב. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$

2.

א. חשבו את $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2} dx$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+2} dx$

3. תהי $a \in \mathbb{R}$.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x = \arctan(x) + a$, הוכיחו תשובתכם.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $1 = \frac{\arctan(x)}{x}$, הוכיחו תשובתכם.

4. תהיינה פונקציות f, g הגזירות בכל הממשיים, כך ש $f'(x) > g'(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

א. הוכיחו/הפריכו: לכל שתי נקודות $a < b$ מתקיים $f(b) \geq g(a)$.

ב. הוכיחו/הפריכו: לכל שתי נקודות $a < b$ מתקיים $f(b) - f(a) \geq g(b) - g(a)$.

5. תהי סדרה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, ונניח $0 < a_1 < 1$.

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n^2} + \frac{1}{n} \right]$

ב. קרבו את $1 - \cos(1)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.