- אטלס M: (φ_i, Ω_i^1), (ψ_j, Ω_j^2)
- אטלס ∂M:

$$\left(\tilde{\psi}_j, \Omega_j^2 \cap \partial H^k\right) \qquad \tilde{\psi}_j(t_1, \dots t_{k-1}) = \psi_j(t_1, \dots t_{x-1}, 0) \qquad (\partial M)_{\text{hat}}$$

$$x \in \partial M \qquad x = \psi(t) \qquad t = (t_1, \dots t_{k-1}, 0) \in \partial H^k$$

$$T_x(\partial M) = \left\{ \tilde{\psi}'(t_1, \dots t_{k-1}) \hat{\imath} \middle| \hat{\imath} \in \mathbb{R}^{k-1} \right\} \qquad \xi_i = \tilde{\psi}'(t_1, \dots t_{k-1}) e_i$$

הבסיס של $T_x(\partial M)$: $[\partial_1, \dots \partial_{k-1}]$

$T_x(M) = \left\{ \psi'(t_1, \dots t_{k-1}, 0) \xi \middle| \xi \neq \mathbb{R}^k \right\}$

הבסיס של $T_x(u)$: $[\partial_1, \dots \partial_{k-1}, \psi'(t_1, \dots t_{k-1}, 0) e_k]$ $\leftarrow$ הבסיס הרגיל

$$\dim T_x(\partial M) = k - 1 \qquad \dim T_x(M) = k$$

$$T_x(\partial M) \subset T_x(M)$$

$$\dim \{h \neq T_x(M) | h \perp T_x(\partial U)\} = 1$$

אם $h \in T_x(M)$ ו$h \perp T_x(\partial M)$ אזי $h = \psi'(t_1, \dots t_{k-1}, 0) \xi$ כאשר $\xi_k \neq 0$

הגדרה

יהי $h = \psi'(t_1 \dots t_{k-1}, 0) \xi \perp T_x(\partial M)$, $\xi_k \neq 0$.

אם $\xi_k < 0$ אז נאמר שh פונה בחוץ(וקטור חיצוני) ואם $\xi_k > 0$ אז נאמר שh פונה בפנים(וקטור פנימי).

$$M = H^k$$

- וקטור חיצוני היחידה: $-e_k$
- וקטור פנימי היחידה: e_k

נניח $u_0 \in \partial H^k$, $\psi(u_0) = x_0 \in \partial M$. נניח V וקטור חיצוני, ז"א $\xi_k < 0$. $\qquad v = \psi'(u_0)\xi$

נגדיר עקום:

$$t \in (-\epsilon, 0) \qquad \gamma(t) = \psi(u_0 + t\xi)$$

$$\gamma(0) = \psi(u_0) = x_0$$

$$\gamma'(0) = \psi'(u_0)\,\xi = v$$

$$v = \gamma'(0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h}$$

<u>v_x וקטור חיצוני היחידה!</u>
נבחר בסיס $[\partial_1, \dots \partial_{k-1}]$ של $T_x(\partial M)$ כך שהבסיס $[v_x, \partial_1, \dots \partial_{k-1}]$ של $T_x(M)$ מגדיר אותה אוריינטציה שהבסיס הרגיל של $T_x(M)$ מגדיר.

למה

יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k־ממדי. אזי

$$(\partial M)_{\text{ind}} = (-1)^k (\partial M)_{hat}$$

הערה: זה אומר שהאוריינטציה תלויה במימד!

הוכחת הלמה

$$[v_x, \gamma_1, \dots \gamma_{k-1}] = -[\gamma_1, v_x, \gamma_2, \dots \gamma_{k-1}] = [\gamma_1, \gamma_2, v_x, \dots, \gamma_{k-1}] = \dots =$$

$$= (-1)^{k-1}[\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{k-1}, v_x] = (-1)^k (\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{k-1}, \psi'(t_1, \dots t_{k-1}, 0)\, e_k)$$

$$v_x = v_0 - \alpha\psi'(t_1, \dots t_{k-1}, 0)\, e_k \qquad \alpha > 0 \qquad v_0 \in T_x(\partial M)$$

מטריצת מעבר בין $[\gamma_1, \dots \gamma_{k-1}, v_x]$ ו$[\gamma_1, \dots \gamma_{k-1}, \psi'(t_1, \dots t_{k-1}, 0)]$ היא

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \cdots & -\alpha \end{pmatrix} = A$$

$$\det A = -\alpha < 0$$

עבור k אי זוגי $[\tilde{\gamma}_1, \dots \tilde{\gamma}_{k-1}]$

$$[v_x, \tilde{\gamma}_1, \dots \tilde{\gamma}_{k-1}] = (-1)^k [\tilde{\gamma}_1, \dots \tilde{\gamma}_{k-1}, \psi'(t_1, \dots t_{k-1}, 0)\, e_k]$$

דוגמה

תהי $K\subset\mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית.

$h\in T_x\left(\partial K\right)$: $[v,h]$ מגדיר אותה אוריינטציה ש$\mathbb{R}^2=T_x\left(K\right)$,$[e_1,e_2]$

דוגמה

תהי $K\subset\mathbb{R}^3$ קבוצה קומפקטית.

$(\partial K)_{\mathrm{ind}}$: אם v נורמלי חיצוני אז $[v,r'_u,r'_v]$ מגדיר אותה אוריינטציה ש$[e_1,e_2,e_3]$:

$$\left[\frac{r'_u\times r'_v}{\|r'_u\times r'_v\|},r'_u,r'_v\right]=[e_1,e_2,e_3]$$

הפרמטריזציה של ∂K, $r=r\left(u,v\right)$ כזאת ש

$$v=\frac{r'_u\times r'_v}{\|r'_u\times r'_v\|}$$

$h\in T_x\left(\partial M\right)$: $[v,h]$ מגדיר אותה אוריינצציה ש$[r'_u,r'_v]$:

$$[n,r'_u,r'_v]=[e_1,e_2,e_3]\Rightarrow[n,v,h]=[e_1,e_2,e_3]$$

תזכורת

תבנית־k דיפרנציאלית עם $\mathbb{R}^n$: $\omega:\Omega\to\wedge^k\left(\mathbb{R}^n\right)$

Ω קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^n$

לכל $x\in\Omega$, $\omega\left(x\right)\in\wedge^k$

$$\omega\left(x;h_1,h_2,\dots h_k\right)\qquad x\in\Omega,h_i\in\mathbb{R}^n$$

צורה כללית:

$$\omega=\sum_{1\le j_1\le\cdots\le j_k\le n}\omega_{i_1,\dots i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\left(x;h_1,h_2,\dots h_k\right)=\pi_{i_1,\dots i_k}=\begin{vmatrix}h^1_{i_1}&\cdots&h^k_{i_1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\h^1_{i_k}&\cdots&h^k_{i_k}\end{vmatrix}$$

הגדרה

יהיו $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ קבוצות פתוחות, $\varphi : U \to V$ פונקציה דיפרנציאבילית, ω תבנית־k דיפרנציאלית על $\mathbb{R}^n$.

העתקה φ^*(pullback) מוגדרת על ידי

$$\varphi^*\omega\left(\underbrace{t}_{\in U};\underbrace{v_1}_{\in\mathbb{R}^m},\underbrace{v_2}_{\in\mathbb{R}^m},\ldots\underbrace{v_k}_{\in\mathbb{R}^m}\right)=\omega\left(\underbrace{\varphi\left(t\right)}_{\in V};\underbrace{\varphi'\left(t\right)v_1}_{\in\mathbb{R}^n},\underbrace{\varphi'\left(t\right)v_2}_{\in\mathbb{R}^n},\ldots\underbrace{\varphi'\left(t\right)v_k}_{\in\mathbb{R}^n}\right)$$

φ^* היא פונקציה מתבנית־k על $\mathbb{R}^n$ ω לתבנית־k על $\mathbb{R}^m$ $\varphi^*\omega$

עבור $k=0$ תבנית־0: $\varphi^* f\left(t\right)=f\left(\varphi\left(t\right)\right)$

משפט

מתקיים

$$\varphi^*\left(\mathrm{d}\omega\right)=\mathrm{d}\left(\varphi^*\omega\right)$$

הוכחה

ω תבנית־0, $\omega=\pi_i\left(x\right)=x_i$

$$\omega=\pi_i\left(x\right)=x_i$$

$$\boxed{\mathrm{d}\varphi_i\left(t\right)}$$

$$\varphi=\left(\varphi_1\left(t\right),\varphi_2\left(t\right),\ldots\varphi_n\left(t\right)\right)$$

$$\varphi^*\left(\pi_i\right)=\pi_i\left(\varphi\right)=\varphi_i\left(t\right)$$