חזרה

הנחה קבועה: (X,S,μ) ממ"ח.

הגדרנו: עבור $f:X\to[0,\infty]$ מדידה, $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\sup_{\substack{0\le\varphi\le f\\ \varphi \text{ is simple}}}\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu$.

משפט 3: תכונות פשוטות של האינטגרל. חסר: $\int f+g=\int f+\int g$

משפט 4: (משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג) נניח שלכל $x\in X$ $0\le f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le\cdots$ כאשר הf_n מדידות. נגדיר $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\sup f_n(x)$, אז $f(x)\ge0$ ומדידה ומתקיים $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$.

משפט 5: (למת פאטו) נניח שלכל n, $f_n:X\to[0,\infty]$ מדידה. אזי $\int_X \underline{\lim}f_n\,\mathrm{d}\mu=\underline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$

מסקנה

נניח שלכל n $f_n:X\to[0,\infty]$ מדידה, ונניח שקיים $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ (לכל $x\in X$), אזי $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\underline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה

כאן $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\underline{\lim}f_n(x)$, ולכן התוצאה מיידית מלמת פאטו.

הערה

בהרבה ספרים המסקנה נקראת "למת פאטו" ולא מביאים את משפט 5, שהוא יותר כללי.

דוגמאות

הדוגמאות יהיו במסגרת הקלאסית של מידת לבג m על $\mathbb{R}$.

1. לכל n נגדיר $f_n(x)=I_{[n,\infty)}=\begin{cases}1 & x\ge n\\ 0 & x<n\end{cases}$. לכל n, $f_n:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ מדידה לבג. הf_n יורדות עם n:

$$f_1\ge f_2\ge f_3\ge\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\equiv0=f(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}m=0\ne\infty=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)\,\mathrm{d}m$$

מכל מקום למת פאטו נכונה כאן:

$$\int_X f\,\mathrm{d}m = 0 < \infty = \underline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m$$

2. נגדיר $f_n\left(x\right)$ שטוחה עד 0, משם עולה בקו ישר עד $\left(\frac{1}{n},n\right)$, יורדת בקו ישר עד $\left(\frac{2}{n},0\right)$, וממשיכה שטוחה.

גם כאן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = f\left(x\right) \equiv 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נסתמך על זה שאינטגרל לבג שווה אינטגרל רימן עבור פונקציות רציפות.

לכל n, $\int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}m$=שטח המשולש=1, ושוב יש אי שוויון:

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}m$$

משפט 6

תהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. אזי קיימת סדרה עולה של פונקציות פשוטות $0\le\varphi_1\left(x\right)\le\varphi_2\left(x\right)\le\cdots$ כך שלכל $x\in X$ $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\left(x\right)$, ומתקיים

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה

ניקח $n\in\mathbb{N}$ כלשהו. עבור $1\le k\le 2^{2n}$ נגדיר

$$E_n = \left\{x\in X \middle| \frac{k-1}{2^n} \le f\left(x\right) < \frac{k}{2^n}\right\}$$

ונגדיר

$$\varphi_n\left(x\right) = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} I_{E_n}\left(x\right) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \frac{k-1}{2^n}\le f\left(x\right) < \frac{k}{2^n} \\ 0 & f\left(x\right)\ge 2^{2n} \end{cases}$$

בתרגיל הוכחנו ש$\varphi_n\left(x\right)$ עולות עם n ולכל $x\in X$, $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\left(x\right)$.

עכשיו, נובע ממשפט 4 ש

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n\,\mathrm{d}\mu$$

הערה

לכל n, $\sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n}\mu\left(E_{n,k}\right) = \int_X \varphi_n \,\mathrm{d}\mu$ הם "סכומי לבג" שהגדרנו בשיעור הראשון, ואמרנו שהם הסכומים המקרבים את $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$. עכשיו הוכחנו את זה(עבור $f \geq 0$ מדידה).

משפט 7

יהיו $f, g : X \to [0, \infty]$ מדידות. אזי:

א. $\int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu$.

ב. אם לכל n $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה ואם $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ אז $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$.

ג. אם $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ קבוצות מדידות, אז $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu$.

ד. לכל $E \in S$ נגדיר $\nu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$, אז ν מידה על (X, S).

הוכחה

א. לפי משפט 6 קיימות סדרות עולות של פונקציות פשוטות לא שליליות $\{\varphi_n\}$ ו$\{\psi_n\}$ כך שלכל $x \in X$, $\begin{matrix} f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \\ g(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \end{matrix}$. לכן $f+g$ היא הגבול של סדרה עולה $\varphi_n + \psi_n$. לפי משפט 6

$$\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n) \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{theorem } 2}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\int_X \varphi_n \,\mathrm{d}\mu + \int_X \psi_n \,\mathrm{d}\mu\right] =$$

$$= \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$$

ב. נתון $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. לכל N טבעי נגדיר סכום חלקי $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. ע"פ אינדוקציה נובע מסעיף א' שלכל N, $\int_X S_N \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$. כיוון שכל $f_n(x) \geq 0$, ה$S_N(x)$ עולות עם N ולפי הנתון $f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$. לפי משפט 4

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X S_N \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

(השלב האחרון הוא לפי הגדרת סכום אינסופי!)

ג. נתון ש-E_n מדידות וזרות בזוגות, והגדרנו $E=\biguplus_{n=1}^{\infty}E_n$. נובע שלכל $x\in X$ $I_E\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}I_{E_n}\left(x\right)$. כמו כן $f\left(x\right)I_E\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f\left(x\right)I_{E_n}\left(x\right)$. עכשיו נובע מסעיף ב'

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_X fI_E\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X fI_{E_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\,\mathrm{d}\mu$$

ד. לכל $E\in S$ הגדרנו $\nu\left(E\right)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu$. ז.א. $\nu:S\to[0,\infty]$ מוגדרת היטב, $\nu\left(\emptyset\right)=\int_{\emptyset}f\,\mathrm{d}\mu=0$ (כי $\mu\left(\emptyset\right)=0$), ולפי סעיף ג' אם $E=\biguplus_{n=1}^{\infty}E_n$ מדידות אז

$$\nu\left(E\right)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu\left(E_n\right)$$

וקיימנו את כל התנאים.

תורת "כמעט בכל מקום"

הגדרה

יהי (X,S,μ) ממ"ח. אומרים שתכונה P נכונה כמעט בכל מקום(כב"מ) $\mathrm{d}\mu$(כלומר ביחס למידה μ) אם $E=\{x\in X|P\text{ is not true for }x\}$ מקיימת $\mu\left(E\right)=0$.

מכאן ואילך נחזור למסגרת של ממ"ח (X,S,μ) "קבוע" וכל מושג של כב"מ הינו ביחס ל-μ הזו.

משפט 8

יהיו $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות. אזי:

א. אם $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ כב"מ אז $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\int_X g\,\mathrm{d}\mu$.

ב. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=0\iff f\left(x\right)=0$ כב"מ.

ג. אם $\int_X f\,\mathrm{d}\mu<\infty$ אז $f\left(x\right)<\infty$ כב"מ.

הוכחה

א. נגדיר $E=\{x\in X|f\left(x\right)=g\left(x\right)\}$. לפי הנתון $\mu\left(E^{\complement}\right)=0$. לפי משפט 3 $\int_{E^{\complement}}=\int_{E^{\complement}}g\,\mathrm{d}\mu=0$. מכאן ש:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\int_E f\,\mathrm{d}\mu+\underbrace{\int_{E^{\complement}}f\,\mathrm{d}\mu}_{=0}=\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_E g\,\mathrm{d}\mu=\int_E g\,\mathrm{d}\mu+\int_{E^{\complement}}g\,\mathrm{d}\mu=\int_X g\,\mathrm{d}\mu$$

ב. $\Longrightarrow$ אם נתון ש-$f(x)=0$ כב"מ, אז לפי סעיף א' $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\int_X 0\,\mathrm{d}\mu=0$.

$\Longleftarrow$ נתון $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=0$. נגדיר $E=\{x\in X|f(x)>0\}$. צ"ל $\mu(E)=0$(כי אם כן, $f(x)=0$ כב"מ). לצורך זה, לכל n נגדיר $E_n=\left\{x\in X\middle|f(x)\geq\frac{1}{n}\right\}$. אז $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ו-$0\leq\mu(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$, ולכן מספיק להוכיח שלכל n, $\mu(E_n)=0$. אבל לכל n

$$0=\int_X f\,\mathrm{d}\mu\geq\int_{E_n}f\,\mathrm{d}\mu\geq\int_{E_n}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{n}\mu(E_n)$$

מכאן שלכל n, $0\leq\mu(E_n)\leq n\cdot 0=0$, ז.א. $\mu(E_n)=0$ ולכן $0\leq\mu(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=0$, והוכחנו $\mu(E)=0$ ולכן $f(x)=0$ כב"מ.

ג. נתון $\int_X f\,\mathrm{d}\mu<\infty$. נגדיר $E=\{x\in X|f(x)=\infty\}$. בדרך השלילה נניח $\mu(E)>0$. לפי הנתון לכל $M>0$, $f(x)\geq M\cdot I_E(x)$. נובע שלכל $M>0$

$$\infty>\int_X f\,\mathrm{d}\mu\geq\int M\cdot I_E(x)=M\mu(E)$$

ז.א. לכל $M>0$

$$0\leq\mu(E)\leq\frac{1}{M}\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

נשאיף $M\to\infty$ להסיק ש-$\mu(E)=0$ בסתירה להנחה שלנו. הסתירה מוכיחה את ג'.

מסקנה מסעיף ב

אם $\mu(E)>0$, ואם $f(x)>0$ על E, אז $\int_E f\,\mathrm{d}\mu>0$.

הגדרה

יהי (X,S,μ) ממ"ח. μ נקראת מידה "שלמה" אם לכל $E\in S$ כך ש-$\mu(E)=0$ כך תת קבוצה של E שייכת ל-S.

דוגמאות

1. מידת לבג על $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ היא מידה שלימה. הסיבה היא שאם $E\in L(\mathbb{R})$ מקיימת $m(E)=0$ אזל לכל $F\subset E$

$$0\leq m^*(F)\leq m^*(E)=m(E)=0$$

ז.א. $m^*(F)=0$, ולפי משפט מתחילת הקורס $F\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$.

2. מידת לבג m_n על $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ שלימה מאותה סיבה כמו m על $\mathscr{L}(\mathbb{R})$.

3. הצמצום של מידת לבג m לאלגברת בורל $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ זה מידה לא שלמה.

משפט 9

יהי (X,S,μ) ממ"ח, ונניח שμ מידה שלימה על S. עוד נניח ש$f:X\to\mathbb{R}^*$ מדידה(S) ו$g:X\to\mathbb{R}^*$ מקיימת $f(x)=g(x)$ כב"מ$(\mathrm{d}\mu)$. אזי g מדידה(S).

הוכחה: תרגיל

לאור המושגים הנ"ל אפשר לשפר מעט את המשפטים שלנו. למשל משפט 4 נכון בהכללה הבאה:

שיפור למשפט 4

לכל n נניח ש$f_n:X\to[0,\infty]$ מדידה. עוד נניח שלכמעט כל x‏$(\mathrm{d}\mu)$ $0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots$, ו$f:X\to[0,\infty]$ מדידה ומקיימת $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ כב"מ. אזי

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

ואם μ מידה לשמה אין צורך להניח שf מדידה, אלא כיוון ש$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ כב"מ, f מדידה אוטומטית.

הוכחה

נגדיר את E להיות הקבוצה ה"יוצאת מן הכלל" שבה $f_n(x)$ לא עולה עם n או שבה $f(x)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. לפי הנתון $\mu(E)=0$. על $E^{\complement}$ התנאים של משפט 4 מתקיימים, לכן נוכל להסיק:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\int_{E^{\complement}}f\,\mathrm{d}\mu+\underbrace{\int_E f\,\mathrm{d}\mu}_{=0}=\int_{E^{\complement}}f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E^{\complement}}f_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

ואם μ מידה שלמה, נגדיר לכל $x\in X$ $g(x)=\overline{\lim}f_n(x)$. כיוון שכל f_n מדידה, g מדידה על $E^{\complement}$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\overline{\lim}f_n(x)=g(x)$$

ז.א. $f(x)=g(x)$ כב"מ$(\mathrm{d}\mu)$. כיוון שg מדידה וμ שלמה משפט 9 אומר שf מדידה.

שיפור למשפט 5

נניח שלכל n $f_n:X\to[0,\infty]$ מדידה ונניח שקיים $f:X\to[0,\infty]$ מדידה כך ש$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ כב"מ. אז $\int_X f\,\mathrm{d}\mu\le\underline{\lim}\int_X f\,\mathrm{d}\mu$, ואם μ מידה שלמה אז f פונקציה מדידה באופן אוטומטי.

עוד מסקנות ממשפט 9

כבר ציינו שאם $f,g : X \to \mathbb{R}^*$ אז יש בעייה להגדיר $f+g$ בנקודות שבהן $f(x) = +\infty$ ו-$g(x) = -\infty$ או להיפך, ויש בעיה להגדיר $f(x)\,g(x)$ במצב של $\pm\infty \cdot 0$.
<u>אבל</u> אם μ מידה שלמה ואם ידוע ש-$|f(x)| < \infty$ כב"מ וגם $|g(x)| < \infty$ כב"מ אז הפונקציות $f \pm g$ ו-$f \cdot g$ יהיו מדידות באופן בלתי תלוי בהגדרתן בנקודות הבעייתיות.

אינטגרל לבג הכללי

עדיין עוסקים בממ"ח קבוע, ועכשיו נעיין בפונקציות $f : X \to \mathbb{R}^*$. תחילה נגדיר

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} = \max(f(x), 0)$$

ונגדיר

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases} = \max(0, -f(x))$$

אם f מדידה אז f^+ ו-f^- מדידות, ולפי עצם ההגדרה $f^+(x) \geq 0$ ו-$f^-(x) \geq 0$. לכל $x \in X$:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

הגדרה

תהי $f : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי. אומרים ש-f אינטגרבילית $\mathrm{d}\mu$ אם f מדידה(S) ואם $\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu < \infty$ וגם $\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu < \infty$, ואם כן מגדירים

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_X f^-\,\mathrm{d}\mu$$

לפי זה גם פונקציה מדידה $f : X \to [0,\infty]$ נקראת אינטגרבילית($\mathrm{d}\mu$) אם $\int_X f\,\mathrm{d}\mu < \infty$.

משפט 10

תהי $f : X \to \mathbb{R}^*$ מדידה. אז f אינטגרבילית($\mathrm{d}\mu$) $\iff$ $|f|$ אינטגרבילית($\mathrm{d}\mu$), ואם כן אז $\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה

תחילה נניח שf אינטגרבילית. ז.א. $\int f^{+}\,\mathrm{d}\mu<\infty$ וגם $\int f^{-}\,\mathrm{d}\mu<\infty$.. וכיוון ש$f^{+}$ וf^{-} לא שליליות, נובע ממשפט 7 ש

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu=\int_X \left(f^{+}+f^{-}\right)\,\mathrm{d}\mu=\int f^{+}\,\mathrm{d}\mu+\int f^{-}\,\mathrm{d}\mu<\infty$$

לכן $|f|$ אינטגרבילית. ולהיפך: אם נתון ש$|f|$ אינטגרבילית, נשים לב שלכל $x\in X$ $|f(x)|=f^{+}(x)+f^{-}(x)$, ולכן $0\le f^{+}(x)\le|f(x)|$.
נובע ממשפט 3 ש$\int f^{+}\,\mathrm{d}\mu\le\int|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty$. כמו כן $\int f^{-}\,\mathrm{d}\mu\le\int|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty$, והוכחנו ש$f$ אינטגרבילית.
לגבי אי השוויון, $\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right|=\left|\int_X f^{+}\,\mathrm{d}\mu-\int_X f^{-}\,\mathrm{d}\mu\right|\le\left|\int_X f^{+}\,\mathrm{d}\mu\right|+\left|\int_X f^{-}\,\mathrm{d}\mu\right|$, אבל הכל חיובי ואפשר להוריד "ערך מוחלט" להסיק

$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right|\le\int_X f^{+}\,\mathrm{d}\mu+\int_X f^{-}\,\mathrm{d}\mu=\int_X\left(f^{+}+f^{-}\right)\,\mathrm{d}\mu=\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu$$

■