תרגיל 8

1. תזכורת: בתרגול הגדרנו חזקות סודרים ברקורסיה באופן הבא:
עבור $\alpha \neq 0$

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ \alpha^\gamma \cdot \alpha & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \alpha}\{\alpha^\gamma\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכיחו באמצעות משפט ההגדרה ברקורסיה שהפונקציה הרקורסיבית $f(\beta) = \alpha^\beta$ אכן מגדירה פונקציה $f : ON \to ON$. כלומר, מצאו את הפונקציות F, G המתאימות מהמשפט.
נרצה פונקציה שמקיימת את הנוסחא הבאה:

$$G(\beta) = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ G(\gamma) \cdot \alpha & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \beta}\{G(\gamma)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

לצורך כך נגדיר: $F : ON \times Par(ON, ON) \to ON$

$$F(\beta, g) = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ g(\max A') \cdot \alpha & \text{if } \max A' \text{ exist} \\ \sup(Im(g)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר A' הוא התחום של הפונקציה החלקית g. שימו לב שאכן נקבל $G(\beta) = F(\alpha, G|_{\beta\downarrow})$ מכיוון שβ גבולי אמ"ם לקבוצת הקודמים שלו יש מקסימום.

2. תהי D קבוצה לא ריקה של קבוצות. הוכיחו ש $\bigcap D = \{x | \forall B \in D, x \in B\}$ הוא קבוצה. (שימו לב, שבניגוד לאקסיומת האיחוד, כאן יש לדרוש שהקבוצה אינה ריקה)
פתרון:

נתון שD לא ריקה. נבחר $A \in D$. נגדיר את הנוסחא הבאה: $\varphi(x) =: [\forall B \in D, x \in B]$. הקבוצה המובקשת היא: $\{x \in A : \varphi(x)\}$. זאת קבוצה מאקסיומת ההפרדה.

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו שA^B כלומר, אוסף כל הפו' מA לB הוא קבוצה.
פתרון:

נשים לב ש

$$A^B = \{R : dom(R) = A \wedge (a,b),(a,c) \in R \Rightarrow b = c\}$$

קבוצת כל היחסים החד ערכיים והשלמים מA לB.כלומר,

$$A^B = \{R \subseteq A \times B : dom(R) = A \wedge (a,b),(a,c) \in R \Rightarrow b = c\}$$

$$\Downarrow$$

$$A^B = \{R \in P(A \times B) : [\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R] \wedge [(a,b),(a,c) \in R \Rightarrow b = c]\}$$

אם AוB קבוצות, אז ראינו בתרגול ש $A \times B$ קבוצה. לכן מאקסיומת קבוצת החזקה גם $P(A \times B)$ קבוצה. ואז מהפרדה על $P(A \times B)$ נקבל ש A^B קבוצה.

4. הוכיחו שאוסף כל הנקודונים (קבוצות מגודל 1) אינו קבוצה.
הוכחה:

נסמן בA את אוסף כל הנקודונים ונניח שA קבוצה. מאקסיומת הזיווג $\{A\}$ קבוצה. ברור ש$A \in \{A\}$. אבל $\{A\}$ מגודל 1, ולכן $\{A\} \in A$. ראינו בתרגול שמצב כזה אינו אפשרי.