תרמו-דינמיקה ומכניקה סטטיסטית 1

שיעור 1 – 23.2.2014

60% , שלושה בחנים 30%, 10% הגשת תרגילים.

הולך אקראי:

הולך כלשהו מתקדם ימינה בהסתברות p ו-q שמאלה. (p+q=1). נגדיר $n = n_{right}, n_{left} = N - n$ עבור N סה״כ צעדים.

כעת נדבר על הסיכוי למסלול מסוים: ברור שהוא נתון ע״י מכפלת ההסתברויות של כל צעד. נניח שתיים ימינה ושלושה שמאלה p^2q^3.

מספר האפשרויות לקבל n מסוים מתוך N הוא $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.

הסיכוי לקבל מסלול עם n צעדים ימינה ו-N-n שמאלה הוא: $W(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$. ברור לנו ש $\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1$.

כעת נחשב גודל ממוצע: $< A >= \sum W(x)A(x)$. עבור הולך אקראי נקבל: $< n >= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} n$, ונפעל ע״פ הביטוי $n \cdot p^n = p \cdot \frac{\partial}{\partial p}(p^n) = p(n \cdot p^{n-1}) = np^n$. נציב ונקבל $< n >= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^{N-n} p \cdot \frac{\partial}{\partial p}(p^n) = p \cdot \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = p \cdot \frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N = Np(p+q)^{N-1} = pN$. קיבלנו אחרי הפיתוח ש $< n >= pN$.

כעת נגדיר שונות: $\Delta n = n - < n >$ וגם $< (\Delta n)^2 >=< n^2 > - < n >^2 = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} n^2 - (pN)^2 = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} n \left(p \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right) p^n q^{N-n} - p^2N^2 = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(p \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right)^2 p^n q^{N-n} - p^2N^2 = \left(p \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right)^2 (p+q)^N = \left(p \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right)(p+q)^N = \left(p \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p}(p(p+q)^N)\right) = \left(p \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right)((p+q)^N + Np(p+q)^{N-1}) = \cdots = (Np)^2 + Npq - (Np)^2 = Npq$.

נחזור לתחילת השיעור, ונגדיר: מיקום סופי m: $m = n_r - n_l = n - (N-n) = 2n - N$, וכעת נחשב על פי פיתוחינו את $< m >= 2 < n > -N = 2Np - N = N(2p-1) = N\big(p - (1-p)\big) = N(p-q)$ (הממוצע של m).

כדי לחשב את השונות נציב גם כן ונקבל $\Delta m = m - < m >= 2n - N - < 2n - N >= 2n - 2 < n >= 2(n - < n >) = 2\Delta n$.

וכמו כן $< (\Delta \mathrm{m})^2 >=< 4(\Delta \mathrm{n})^2 >= 4 < (\Delta \mathrm{n})^2 >= 4\mathrm{Npq}$

לסיכום:

- $< n >= Np$.
- $< n^2 >= (Np)^2 + Npq$.
- $< (\Delta n)^2 >=< n^2 > - < n >^2$.