28.7

אידיאל ראשוני: $AB\subseteq P \Leftarrow A\subseteq P$ או $B\subseteq P$.

טענה: יהי $I\lhd R$ אזי האידיאלים הראשוניים של R/I הם P/I עבור $I\subseteq P\lhd R$ ראשוני.

תרגיל: יהי R חוג בוליאני (=כל האיברים אידמפוטנטים $e^2=e$) אזי כל אידיאל שווה לחיתוך של האידיאלים הראשוניים שמכילים אותו.

הוכחה: $I\lhd R$ נעבור להסתכל במנה R/I (גם חוג בוליאני). $\bigcap_{\substack{P\ \text{ראשוני}\\ I\subseteq P}} P = I$

הטענה שקולה להוכיח של-R/I חיתוך האידיאלים הראשוניים הוא 0 (למה?)

יהי $0,1\neq x\in R/I$ ($x+I$). **מחיתוך**.

החוג חלקי ולכן $\bar{x}^2=\bar{x}$ $\quad \bar{x}(\bar{x}-\bar{1})=0$

$\Leftarrow$ $\bar{x}$ ו-$\bar{1}-\bar{x}$ מחלק אפס $\Leftarrow$ לא הפיך, ולכן הוא מוכל ~~באידיאל~~ במקסימלי

הראינו שכל אידיאל מקסימלי $\Leftarrow$ ראשוני.

וכמו כן $\bar{x}$ באידיאל מקס $\Leftarrow$ ראשוני,

אבל לא יכול שהם מוכלים יחד באידיאל ראשוני אחד. ∎

משפט: יהי R חוג $I\lhd R$ I ראשוני $\Leftrightarrow$ R/I חוג ראשוני.

$\Downarrow$

($AB=0 \Leftarrow A=0$ או $B=0$)

אם R קומוטטיבי: I ראשוני $\Leftrightarrow$ תחום.

מסקנה: מקסימלי $\Leftarrow$ ראשוני. (דוגמא: שדה ותחום $4\mathbb{Z}\subseteq 2\mathbb{Z}$).

דוגמאות:

1) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[x] \rhd \langle x\rangle$ אידיאל $\qquad \dfrac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[x]}{\langle x\rangle}\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

ולכן [illegible]

תר'

(2) $\varphi[x] \triangleleft \langle x^2-1\rangle$ לא ראשוני.

$$\varphi[x]/\langle x^2-1\rangle =$$

$$\overline{(x-1)}\,\overline{(x+1)} = \overline{x^2-1} = \bar{0}$$

כלומר שיש מחלק אפס נקבל לא תחום שלמות ולכן האידאל לא יכול להיות ראשוני.

תרגיל: הוכיחו כי $\langle 3\rangle \triangleleft \mathbb{Z}[i]$ ראשוני.

(למה $\langle 5\rangle \triangleleft \mathbb{Z}[i]$ לא ראשוני?) $(1-2i)(1+2i)=5$

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

הוכחה: נשתמש באיזומורפיזם - התמונה של $\langle 3\rangle$ תחת המנה

$$\mathbb{Z}[x]/\langle x^2+1\rangle = \mathbb{Z}[i]$$

$$\frac{\langle 3, x^2+1\rangle}{\langle x^2+1\rangle}$$

$$\frac{\mathbb{Z}[x]/\langle x^2+1\rangle}{\langle 3, x^2+1\rangle/\langle x^2+1\rangle} \cong \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$$

$\Downarrow$

זה תחום שלמות

תזכורת: $S\subseteq R$ תת קבוצה סגורה לכפל & אפס אין, האידאל ב-R המקסימלי ביחס להכלה ש $P\cap S=\emptyset$ הוא ראשוני.

מיקום

תזכורת: $S\subseteq R$ תת קבוצה סגורה לכפל איברים רגולרים = לא מחלקי אפס $S\subseteq Z(R)$ (תנאי מרכזיות), $(1\in S)$, ~~$(0\notin S)$~~.

הרעיון: חצין למצוא ההרחבה של R ש-איברי S יהיו הפיכים.

$R\subseteq S^{-1}R$

בס"ד

המשך: את איברי S.

<u>בנייה</u>

$$S^{-1}R = \,^{R\times S}/_{\sim}$$

קבוצת $R\times S$

יחס שקילות של שברים

$$\frac{r}{s} \leftrightarrow (r,s)$$

$$\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'} \iff rs' = r's$$

<u>תכונה אוניברסלית</u> $(? \leftarrow S^{-1}R)$ – איך קיים הומומורפיזם ל-

אם יש הומומ' $f: R\to T$ כך ש- $f(S)\subseteq T^{\times}$ אז קיים הומומורפיזם <u>יחיד</u> $\hat{f}: S^{-1}R\to T$ כך ש- $f=\hat{f}\circ i$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & T \\ S^{-1}R \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

<u>התאמה של אידיאלים:</u>

התאמה

$$I\lhd R \leftrightarrows S^{-1}R\lhd R \qquad \left\{\frac{a}{s}\ \middle|\ \begin{matrix} a\in I \\ s\in S\end{matrix}\right\}$$

א היחס שקול

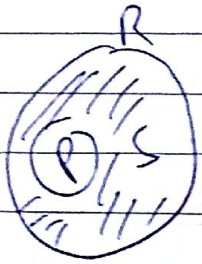
בנוסף יש התאמה של אידיאלים ראשוניים (עבור אידיאלים ראשוניים)
ההתאמה שומרת על הכלה.

<u>דוגמאות חשובות:</u>

(1) מיקוד באידיאל ראשוני: $P\lhd R$ $\quad S=R\setminus P$ $\quad S^{-1}R = R_P = \left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a\in R \\ b\notin P\end{matrix}\right\}$

זה חוג מקומי עם אידיאל מקסימאלי $\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a\in P \\ b\notin P\end{matrix}\right\} = P_P$

ושאר האידיאלים $I_P = \left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a\in I \\ b\notin P\end{matrix}\right\}$ כאשר $I\subseteq P$



דגש:

(2) שדה השברים?

נניח R תחום שלמות. $S=R-\{0\}$

במקרה כזה: $S^{-1}R=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} b,a\in R \\ b\neq 0\end{matrix}\right\}$ הוא שדה. סימון:

הוא יחיד (עד כדי איזומורפיזם) ונקרא שדה השברים. $q(r)$

זה השדה המינימלי שמכיל את R.

דוגמאות:

(1) $\mathbb{Z}$ $\quad S=\{5^i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$S^{-1}\mathbb{Z}=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a\in\mathbb{Z} \\ b\in S\end{matrix}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{a}{5^i}\ \middle|\ i\right\}\cong\mathbb{Z}[\tfrac{1}{5}]$$

וזה שיוצג ע"י $\frac{1}{5}$
פולינומים שהצבנו במקום x
חמישיות.

(2) $\mathbb{Z}$, $\quad P=5\mathbb{Z}$ $\quad S=\mathbb{Z}-5\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}_{(5)}=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a\in\mathbb{Z} \\ b\in S\end{matrix}\right\}=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} b,a\in\mathbb{Z} \\ b\in 5\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}=$$

$S = \mathbb{Z}-5\mathbb{Z}$

$$=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b\in\mathbb{Z} \\ b\notin 5\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b\in\mathbb{Z} \\ 5\nmid b\end{matrix}\right\}.$$

מה האידיאל המקסימלי.

$$5\mathbb{Z}_{(5)}=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a\in 5\mathbb{Z} \\ b\notin 5\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}=\left\{\frac{5a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b\in\mathbb{Z} \\ 5\nmid b\end{matrix}\right\}$$

שרשראות -

$$25\mathbb{Z}_{(5)}=\left\{\frac{25a}{b}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b\in\mathbb{Z} \\ 5\nmid b\end{matrix}\right\}.$$

$\mathbb{Z}$

$5\mathbb{Z}$

(3) דוגמה: $S = \{6^i\} \subseteq \mathbb{Z}$

$$S^{-1}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{matrix} a \in \mathbb{Z} \\ b = 6^i \end{matrix} \right\} \cong \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{6}\right]$$

האם 2 הפיך שם? כן! $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{1}$ גם 3 הפיך

מסקנה: $\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{6}\right] = \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right]$

(4) דוגמה לשדה שברים $R = \mathbb{Z}$ $S = \mathbb{Z} - \{0\}$

$$q(\mathbb{Z}) = S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{matrix} b, a \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{matrix} \right\} = \mathbb{Q}$$

לכן $\mathbb{Q}$ הוא השדה המינימלי שמכיל את $\mathbb{Z}$.

(5) $R = F_x$ פולינומים מעל שדה $S = F[x] - \{0\}$

$$q(F[x]) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \;\middle|\; \begin{matrix} p(x), q(x) \in F[x] \\ q \neq 0 \end{matrix} \right\} = F(x)$$

$\Downarrow$ שדה הפונקציות הרציונליות.

תרגיל: יהי $a \in R$ תחום ושלמות. איך $S = \{a^i\}$ סגור לכפל ומה הוכיחו כי $S^{-1}R \cong R[x]/\langle ax-1 \rangle$

הוכחה: נשתמש בתכונה האוניברסלית $R \to R[x]/\langle ax-1 \rangle$ אחת שיכן בה b איברי S $(\bar{a}^i \cdot \bar{x}^i = \bar{1})$ הפיכים

לכן יש הומומורפיזם $S^{-1}R \to R[x]/\langle ax-1 \rangle$ נשאר לנו להוכיח שזה על.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "r \mapsto \bar{r}"] \arrow[d] & R[x]/\langle ax-1 \rangle = \bar{x} = \bar{a}^{-1} \\
S^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists!"] \arrow[ur, bend right, "\bar{r}\bar{x}^i"']
\end{tikzcd}$$

$r \cdot \frac{1}{s = a^i} = \frac{r}{s = a^i}$

$$S^{-1}R \to R[x]/\langle ax-1 \rangle$$
$$\frac{r}{a^i} \mapsto \bar{r}\,\bar{x}^i$$

מכיוון שעבור כל $\bar{r}$ יש מקור (r) והמקור של $\bar{x}$ הוא $\frac{1}{a}$ זה על.

~~תרגיל: יהי R תחום~~ ולא F

המשך

תרגיל: יהי R תחום שלמות ויהי F שדה השברים שלו ונסמן $S=R-\{0\}$ ($F=S^{-1}R$) הוכיחו $S^{-1}(R[x])=F[x]$.

הוכחה:
קישור $R[x]\to F[x]$ כל האיברים ב-S הפיכים ולכן יש שיכון $S^{-1}(R[x])$

$S^{-1}(R[x])\subseteq F[x]$

ניקח איבר $\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_1}{b_1}x+\frac{a_2}{b_2}x^2+\dots+\frac{a_n}{b_n}x^n\in F[x]$ $(a_i,b_i\in R)$

נעשה מכנה משותף ונקבל $p=\frac{c_0+c_1x+\dots+c_nx^n}{d}$ $c_i,d\in R$

וברור ש $p\in S^{-1}(R[x])$

מש״ל

תרגיל: נניח (P אידיאל ב-R) $P\triangleleft R$ ראשוני מינימלי. הוכח כי $P_P\triangleleft R_P$ הראשוני היחיד.

$P_P\triangleleft R_P$
מונה ב-R
מכנה $\notin P$

הוכחה: ניקח אידיאל ראשוני אמתי של R_P הוא מהצורה I_P כאשר I אידיאל ראשוני של R המקיים $I\cap S=\emptyset$ זה הגו ש- $I\subseteq P$.

$I\cap(R-P)$

אבל מינימליות P נקבל $I=P$.

מש״ל.