פתרון תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{Q}$,
2. $(0,1)$.

פתרון

סעיף א

$\Leftarrow$: תהי $x\in A'$, אזי קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x\}$ כך ש-$x_n\to x$. מתקיים ש-$\{x_n\}\subseteq A$ ומכיוון ש-A היא קבוצה סגורה, היא מכילה את כל נקודות הגבול של הסדרות שמתכנסות שלה ולכן $x\in A$.

$\Rightarrow$: נתון $A'\subseteq A$. נבחר סדרה מתכנסת $\{x_n\}\subseteq A$, $x_n\to x\in X$ ונרצה להראות ש-$x\in A$. נניח בשלילה ש-$x\notin A$. אבל אז $\{x_n\}\subseteq A=A\setminus\{x\}$ ומכאן $x\in A'$. היות ו-$A'\subseteq A$ נקבל $x\in A$ בסתירה להנחה. לכן A סגורה.

סעיף ב

1. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של $\mathbb{Q}$ היא כל $\mathbb{R}$. שכן לכל $r\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים מספר רציונלי גדול מ-r וקטן מ-$r+\varepsilon$.
2. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של $(0,1)$ הוא הקבוצה $[0,1]$.

אמנם,לכל $a\in(0,1)$ הסדרה $\left\{a+\frac{1-a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מוכלת ב $(0,1)\setminus\{a\}$ ומתכנסת ל-a. מהתבוננות בגבול הסדרות $\left\{1-\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ניתן להסיק שגם הנקודות $0,1$ הינן נקודות הצטברות של $(0,1)$. לבסוף, לכל $r\in\mathbb{R}$ כך ש $1<r$ או $r<0$, r **לא** נקודת הצטברות של $(0,1)$. אכן, לא ניתן לבנות סדרה ב-$(0,1)$ שתתכנס ל-r כזה. (ידוע מאינפי' שאם $0<x_n<1$ ו-$x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ אזי $0\le a\le 1$).

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S\subseteq X$ תת קבוצה ו-$x\in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x\in S-S'$ (הפרש קבוצות).

ב. קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\cap S=\{x\}$.

ג. לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq S$, אם $x_n\to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

א$\Leftarrow$ב: $x\notin S'$. כלומר x אינה נקודת הצטברות של S. מכאן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap S=\varnothing$. $x\in S$ עפ"י הנתון וכמו כן $x\in B(x,\varepsilon)$. מכאן, $\{x\}\subseteq B(x,\varepsilon)\cap S$. נניח בשלילה שקיים $x\neq y\in B(x,\varepsilon)\cap S$. נקבל ש $y\in(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap S$. אך זוהי סתירה לכך ש $(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap S=\varnothing$.

בסה"כ נקבל ש $B(x,\varepsilon)\cap S=\{x\}$ כדרוש.

ב$\Leftarrow$ג: תהי $\{x_n\}\subseteq S$ ונניח ש $x_n\to x$. עפ"י סעיף ב' קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\cap S=\{x\}$. מהגדרת הגבול קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in B(x,\varepsilon)$. מכיון ש- $\{x_n\}\subseteq S$ נקבל שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in B(x,\varepsilon)\cap S=\{x\}$.

מכאן לכל $n\geq n_0$ $x_n=x$.

ג$\Leftarrow$א: נניח בשלילה ש- $x\in S'$. כלומר x נקודת הצטברות של S. מכאן, קימת סדרה $\{x_n\}\subseteq S\setminus\{x\}$ כך ש- $x_n\to x$. עפ"י הנתון בסעיף ג' קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n=x$, בסתירה לכך ש- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S\setminus\{x\}$.

<u>שאלה 3</u>

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש- A תת מרחב מטרי שלם.

ב. יהי X מ"מ ו- $A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש- A תת קבוצה סגורה של X.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם X מ"מ שלם, ו- $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי $f(X)$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

א. ניקח סדרת קושי ב- A: $\{x_n\}\subseteq A$. נרצה להראות שהסדרה מתכנסת לנקודה ב- A. כעת, $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב- X ומכיוון ש- X שלם, קיים $x\in X$ כך ש- $x_n\to x$. בגלל ש- A סגורה היא מכילה את נקודות הגבול של הסדרות המתכנסות שלה, ולכן $x\in A$.

ב. על מנת להראות ש- A סגורה נראה שהיא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. תהי $\{x_n\}\subseteq A$ סדרה מתכנסת ל- $x\in X$. נרצה להראות ש- $x\in A$.

אמנם, $\{x_n\}$ היא סדרה מתכנסת ולכן סדרת קושי. מכיוון ש- A שלם נקבל ש- $x_n \to y \in A$. כעת, X מרחב מטרי ולכן גבול הסדרה הוא יחיד ולכן $x=y$ ונסיק הדרוש.

ג. הפרכה. ניקח $X=\mathbb{R}$ ו- $f:X\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x)=e^x$ נקבל ש $f(X)=(0,\infty)$ שאינו שלם (למה?).

דוגמה נוספת- $X=\mathbb{Q}$ עם מטריקת $0-1$. זהו מרחב שלם כי הסדרות המתכנסות הן בדיוק הקבועות לבסוף וזה בדיוק האפיון של סדרות הקושי. ניקח את f להיות פונקצית ההכלה $f(x)=x$. אזי f רציפה (מדוע?) ועם זאת תת המרחב $f(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ אינו שלם. הערה: שימו לב שהמטריקה על $f(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ היא זו המושרית מהמטריקה הסטנדרטית האוקלידית של $\mathbb{R}$ וכידוע מאינפי 1 $\mathbb{Q}$ עם מטריקה זו אינו שלם.

<u>שאלה 4</u>

א) תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה וחח"ע בין מרחבים מטריים, $A\subseteq X$ ו- $a\in X$ נקודת הצטברות של A. הוכיחו ש $f(a)$ נקודת הצטברות של $f(A)$.

ב) מצאו דוגמה נגדית לסעיף א' כשהפונקציה רציפה אבל אינה חח"ע.

<u>פתרון</u>

א) $a\in X$ נקודת הצטברות של A ולכן קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ שכל איבריה שונים כך ש $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. f רציפה ב- a ועפ"י תנאי היינה נקבל ש $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. ברור ש $\{f(x_n)\}\subseteq f(A)$ ומכיון ש f חח"ע אז כל איברי סדרה זו שונים (שכן כל איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים). בסה"כ נקבל ש $f(a)$ נקודת הצטברות של $f(A)$.

ב) יהי $Y=\{0\}$ ו- $A=X=\mathbb{R}$. הפונקציה $f\equiv 0$ רציפה כפונקציה קבועה. היא כמובן אינה חח"ע. $1\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של $\mathbb{R}$ אבל $f(1)=0$ אינה נקודת הצטברות של $\{0\}$.

<u>שאלה 5</u>

תהי $C\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת קנטור.

א) הוכיחו ש $C=C'$.

ב) הראו שהפונקציה $f:C\to[0,1]$ המוגדרת ע"י

$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{2}\right)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}$ אינה חח"ע.

<u>פתרון</u>

א) הוכחנו בתרגול ש C סגורה ומכאן $C'\subseteq C$. נוכיח את ההכלה ההפוכה. יהי $a\in C$. נראה שקיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq C$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל a. לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי $x_n\in C$ מוגדר באופן הבא: הפיתוח הטרנרי של x_n זהה לפיתוח הטרנרי של a פרט למקום ה n שם הוא אפס אם בפיתוח של a יש 2 במקום זה והוא 2 אם בפיתוח של a יש אפס במקום זה. פורמאלית אם $a=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{3^m}$ אז $x_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{3^m}$ כאשר $b_m=\begin{cases}a_m & m\neq n\\ 2-a_m & m=n\end{cases}$. ברור שאיברי הסדרה כולם בקבוצת קנטור וכן שכולם שונים. מתקיים $d(x_n,a)=\frac{2}{3^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ומכאן שהסדרה מקיימת הדרוש ו $a\in C'$.

ב) מתקיים $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{3}\neq\frac{2}{3}$ ו- $f\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}=f\left(\frac{2}{3}\right)$.

<u>שאלה 6</u>

נגדיר מטריקה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: $d(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$.

א.הוכיחו שמטריקה זו שקולה למטריקה הסטנדרטית.

ב. במרחב המטרי $(\mathbb{R},d)$ הנ"ל הראו שהסדרה $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי

שאינה מתכנסת.

ג.מצאו דוגמה לקבוצה X עם שתי מטריקות שקולות (טופולוגית) כך

ש(X,d) שלם ואילו (X,ρ) לא שלם.

<u>פתרון</u>

א. נסמן את המטריקה הסטנדרטית ב s. נראה ש $x_n\xrightarrow{d}x\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{s}x$. נניח ש $x_n\xrightarrow{s}x$. הפונקציה $e^x:(\mathbb{R},s)\to(\mathbb{R},s)$ רציפה (מאינפי 1) ולכן עפ"י היינה $e^{x_n}\xrightarrow{s}e^x$ כלומר $0\xleftarrow[n\to\infty]{}s(e^{x_n},e^x)=\left|e^{x_n}-e^x\right|$. אבל,

ומכאן $d(x_n,x)=\left|e^{x_n}-e^x\right|$ $x_n \xrightarrow{d} x$. נניח כעת ש $x_n \xrightarrow{d} x$.

נקבל $d(x_n,x)=\left|e^{x_n}-e^x\right|=s(e^{x_n},e^x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ומכאן

$e^{x_n}\xrightarrow{s}e^x$. כעת ניעזר ברציפות הפונקציה $\ln:(\mathbb{R},s)\to(\mathbb{R},s)$

ובקיטריון היינה כדי לקבל ש $x_n=\ln\left(e^{x_n}\right)\xrightarrow{s}\ln\left(e^x\right)=x$

כדרוש.

ב. יהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $\varepsilon>\frac{1}{n_0}$. לכל $m>n\geq n_0$ מתקיים

$d\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right),\ln\left(\frac{1}{m}\right)\right)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ והוכחנו

שהסדרה קושי. נניח בשלילה שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $\ln\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{d}x$. אזי

עפ"י א' $\ln\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{s}x$. מרציפות $e^x:(\mathbb{R},s)\to(\mathbb{R},s)$ נקבל שהסדרה

$\left\{e^{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}\right\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת ל e^x במרחב המטרי $(\mathbb{R},s)$. אבל גבול

הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ במרחב המטרי $(\mathbb{R},s)$ הוא יחיד ושווה לאפס. ברור

ש $e^x\neq 0$ ומכאן נקבל סתירה.

ג. $(\mathbb{R},s)$ שלם ו $(\mathbb{R},d)$ אינו שלם (סעיף ב') על אף שהמטריקות d,s

שקולות (סעיף א').

<u>שאלה 7</u>

על הקבוצה $X=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ נגדיר שתי מטריקות : המטריקה הסטנדרטית

המושרית מ $\mathbb{R}$ שנסמנה d , והאולטרה מטריקה ρ המוגדרת ע"י

$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$.

א. האם המטריקות d,ρ שקולות טופולוגית מעל X ?

ב. האם המטריקות שקולות במובן ליפשיץ?

<u>פתרון</u>

א. המטריקות שקולות טופולוגית מעל X שכן אוסף הפתוחות שכל אחת מהן מגדירה הוא בדיוק $P(X)$ כלומר כלל תת קבוצה של X פתוחה ביחס לכל אחת מהמטריקות. מ"ל שכל נקודון פתוח לפי כל אחת מהמטריקות (למה?).לכל $n\in\mathbb{N}$ $\left\{\frac{1}{n}\right\}=B_\rho\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right)=B_d\left(\frac{1}{n},\varepsilon\right)$ כאשר $\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$ (עבור $n=1$ $\varepsilon=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$). מכיון שכדור פתוח הוא קבוצה פתוחה נקבל הדרוש.

ב. המטריקות אינן שקולות במובן ליפשיץ. ראינו ששקילות ליפשיץ שומרת על שלמות . אצלנו (X,ρ) שלם כי הסדרות המתכנסות הן בדיוק הקבועות לבסוף וזה בדיוק האפיון של סדרות הקושי (בדקו!) בעוד ש (X,d) אינו שלם שכן הסדרה $X\supseteq\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרת קושי במרחב (X,d) שאינה מתכנסת (למה?).

בהצלחה!