שיעור 4

הגדרה

הנגזרת החלקית של הפונקציה $z=f(x,y)$ לפי המשתנה x בנקודה (x_0,y_0) היא הגבול הבא:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ סימונים: $f'_x(x_0,y_0)$ או $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

הערה

כאשר נגזור את הפונקציה לפי x נתייחס למשתנה y כאל קבוע.

דוגמא

עבור הפונקציה $f(x,y)=x\cdot y^2+2x^3+y$ מתקיים $f'_x(x,y)=y^2+6x^2$.

נגדיר באותו אופן את הנגזרת החלקית לפי y.

הגדרה

הנגזרת החלקית של הפונקציה $z=f(x,y)$ לפי המשתנה x בנקודה (x_0,y_0) היא הגבול הבא:

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0+,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ סימונים: $f'_y(x_0,y_0)$ או $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

הערה

כאשר נגזור את הפונקציה לפי y נתייחס למשתנה x כאל קבוע.

דוגמא

עבור הפונקציה $f(x,y)=x\cdot y^2+2x^3+y$ מתקיים $f'_y(x,y)=2xy+1$.

נגזרות חלקיות מסדר גבוה

תהי נתונה פונקציה $z=f(x,y)$ המוגדרת בתחום D. נניח שבתחום D_0 $(D_0\subset D)$ קיימות נגזרות חלקיות שלה $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial x}$.

הגדרה

נגזרת חלקית של הפונקציה $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial x}$ נקראת נגזרת חלקית מסדר שני של הפונקציה $z=f(x,y)$.

הערה

קיימים ארבעה סוגים של נגזרת חלקית מסדר שני:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

סימון נוסף לנגזרת חלקית מסדר שני: $f''_{yx}(x,y),\ f''_{xy}(x,y),\ f''_{yy}(x,y),\ f''_{xx}(x,y)$.

תרגיל

מצא את $f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y)$ אם נתון ש $f(x,y)=\sin(xy)$.

פתרון

נחשב את $f''_{yx}(x,y)$. $f'_y(x,y)=x\cos(xy)\Rightarrow f''_{yx}(x,y)=\cos(xy)-xy\sin(xy)$.

נחשב את $f''_{xy}(x,y)$. $f'_x(x,y)=y\cos(xy)\Rightarrow f''_{xy}(x,y)=\cos(xy)-xy\sin(xy)$.

שימו לב ש $f''_{yx}(x,y)=f''_{xy}(x,y)$.

הערה

לא תמיד נקבל ש $f''_{yx}\left(x,y\right)=f''_{xy}\left(x,y\right)$.

משפט

תהיי נתונה פונקציה $z=f\left(x,y\right)$, המוגדרת בתחום פתוח D .

אם בסביבת הנקודה $\left(x_0,y_0\right)\in D$ מוגדרות הנגזרות החלקיות $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ ולפחות אחת מהנגזרות המעורבות $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ או $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ קיימת ורציפה בה, אזי קיימת גם הנגזרת המעורבת השנייה והן שוות.

הערה

באותו אופן ניתן להגדיר גם נגזרות חלקיות מסדר גבוה יותר לפונקציה עם יותר משני משתנים.

סימון - $\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_t^{k_t}}$

אקסטרמום מקומי

הגדרה

לפונקציה f של שני משתנים יש מקסימום מקומי ב $\left(x_0,y_0\right)$, אם קיים עיגול שמרכזו ב $\left(x_0,y_0\right)$ המוכל בתחום של f , כך ש $f\left(x_0,y_0\right)\geq f\left(x,y\right)$ לכל נקודה $\left(x,y\right)$ הנמצאת בתוך עיגול זה. ל f יש מקסימום מוחלט ב $\left(x_0,y_0\right)$, אם $f\left(x_0,y_0\right)\geq f\left(x,y\right)$ לכל נקודה $\left(x,y\right)$ בתחום של f .

הגדרה

לפונקציה f של שני משתנים יש מינימום מקומי ב $\left(x_0,y_0\right)$, אם קיים עיגול שמרכזו ב $\left(x_0,y_0\right)$ המוכל בתחום של f , כך ש $f\left(x_0,y_0\right)\leq f\left(x,y\right)$ לכל נקודה $\left(x,y\right)$ הנמצאת בתוך עיגול זה. ל f יש מינימום מוחלט ב $\left(x_0,y_0\right)$, אם $f\left(x_0,y_0\right)\leq f\left(x,y\right)$ לכל נקודה $\left(x,y\right)$ בתחום של f .

משפט –תנאי הכרחי

אם ל f יש קיצון מקומי בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, ואם הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של f קיימות ב $\left(x_0,y_0\right)$ אז $f_x\left(x_0,y_0\right)=0,\ f_y\left(x_0,y_0\right)=0$.

הערה

ההפך לא בהכרח נכון ז"א אם $f_x\left(x_0,y_0\right)=0,\ f_y\left(x_0,y_0\right)=0$ אז לא בהכרח שלפונקציה יש מינימום/מקסימום מקומי בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

דוגמאות

1. הפונקציה $z=x^2+y^2$ נשים לב ש $z_x\left(0,0\right)=z_y\left(0,0\right)=0$ ואכן בנקודה $\left(0,0\right)$ יש לפונקציה מינימום מקומי.
2. הפונקציה $z=y^2-x^2$ נשים לב ש $z_x\left(0,0\right)=z_y\left(0,0\right)=0$. נבדוק האם לפונקציה יש מינימום/מקסימום מקומי בנקודה $\left(0,0\right)$. נתבונן בעיגול כלשהו שמרכזו $\left(0,0\right)$ ז"א $x^2+y^2<r^2$. הנקודה $\left(0,\frac{r}{2}\right)$ נמצאת בעיגול $x^2+y^2<r^2$ ומתקיים $0<z\left(0,\frac{r}{2}\right)=\frac{r^2}{4}$ והנקודה $\left(0,-\frac{r}{2}\right)$ נמצאת בעיגול $x^2+y^2<r^2$ ומתקיים $0>z\left(0,-\frac{r}{2}\right)=-\frac{r^2}{4}$ ולכן לפונקציה אין מינימום

מקומי\מקסימום מקומי בנקודה $(0,0)$.

הגדרה

נקודה (x_0, y_0) שעבורה מתקיים $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ נקראת נקודה קריטית של פונקציה.

נקודה קריטית של פונקציה שאינה נקודת קיצון מקומי, נקראת נקודת אוכף של הפונקציה.

משפט –מבחן הנגזרות החלקיות מסדר שני

תהיי f פונקציה של שני משתנים, שיש לה נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני בעיגול שמרכזו בנקודה קריטית (x_0, y_0) של f. נסמן - $D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$.

א. אם $D > 0$ ו $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, אז ל f יש מינימום מקומי ב (x_0, y_0).

ב. אם $D > 0$ ו $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, אז ל f יש מקסימום מקומי ב (x_0, y_0).

ג. אם $D < 0$ אז ל f יש נקודת אוכף ב (x_0, y_0).

ד. אם $D = 0$ מבחן זה אינו מספק מידע על (x_0, y_0).

תרגיל

נתונה פונקציה $f(x, y) = xy^2 - y^2 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$ מצא את האקסטרומים של הפונקציה הנתונה.

פתרון

שלב א

נמצא את הנקודות הקריטיות נשווה את הנגזרות החלקיות לאפס ונקבל.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y^2 - x - 2 \\ f_y(x, y) &= 2xy - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $2xy - 2y = 0 \Leftarrow 2y(x-1)$.

אם $y = 0$ מהמשוואה הראשונה נקבל ש $x = -2$.

אם $x = 1$ מהמשוואה הראשונה נקבל ש $y = \pm\sqrt{3}$.

הנקודות הקריטיות הן $(-2,0), (1,\sqrt{3}), (1,-\sqrt{3})$.

שלב ב

נבחן את הנקודות הקריטיות באמצעות מבחן הנגזרות החלקיות מסדר שני.

$f_{xx}(x, y) = -1,\ f_{yy}(x, y) = 2x - 2,\ f_{xy}(x, y) = 2y$.

נבחן את הנקודה $(-2,0)$

$f_{xx}(-2,0) = -1,\ f_{yy}(-2,0) = -6,\ f_{xy}(-2,0) = 0$ ואז

$D = f_{xx}(-2,0) f_{yy}(-2,0) - f_{xy}^2(-2,0) = 6$.

קיבלנו ש $D > 0$ ו $f_{xx}(-2,0) < 0$ ולכן הנקודה $(-2,0)$ היא מקסימום מקומי.

נבחן את הנקודה $(1,\sqrt{3})$

$f_{xx}(1,\sqrt{3}) = -1,\ f_{yy}(1,\sqrt{3}) = 0,\ f_{xy}(1,\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ ואז

$D = f_{xx}(1,\sqrt{3}) f_{yy}(1,\sqrt{3}) - f_{xy}^2(1,\sqrt{3}) = -12 < 0$ ולכן הנקודה $(1,\sqrt{3})$ היא נקודת אוכף.

נבחן את הנקודה $(1,-\sqrt{3})$

$f_{xx}\left(1,-\sqrt{3}\right)=-1,\ f_{yy}\left(1,-\sqrt{3}\right)=0,\ f_{xy}\left(1,-\sqrt{3}\right)=-2\sqrt{3}$ ואז

$D=f_{xx}\left(1,\sqrt{3}\right)f_{yy}\left(1,\sqrt{3}\right)-f_{xy}^{2}\left(1,\sqrt{3}\right)=-12<0$ ולכן הנקודה $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ היא נקודת אוכף.

תשובה סופית: $\left(-2,0\right)$ היא נקודת מקסימום מקומי.

<u>סיכום</u>

כדי למצוא נקודות אקסטרמום יש לבצע את הפעולות הבאות:

1. לחשב את הנגזרות החלקיות $f_x\left(x,y\right),\ f_y\left(x,y\right)$.
2. להרכיב את המערכת $f_x\left(x,y\right)=0,\ f_y\left(x,y\right)=0$ ולמצוא את פתרונותיה – נקודות קריטיות.
3. למצוא את הנגזרות החלקיות מסדר שני בנקודות קריטיות ולחשב עבור כל נקודה קריטית את D.
4. על פי הסימן של D יש להסיק מסקנות על קיום אי קיום של האקסטרמום בנקודה.
5. לבדוק האם הנקודה שהתקבלה היא מינימום מקומי או מקסימום מקומי לפי הסימן של f_{xx}.
6. למצוא (אם ביקשו בשאלה) את הערך של הפונקציה בנקודת האקסטרימום.

<u>הגדרה נקודת שפה (או נקודה גבולית) תחום חסום וסגור</u>

נקודה a נקראת שפה בקבוצה D אם לכל סביבה של a קיימות נקודות שנמצאות בסביבה ולא בקבוצה D וקיימות נקודות שנמצאות גם בסביבה וגם ב D.

נקודה a נקראת נקודה פנימית בקבוצה D אם היא נמצאת ב D והיא לא נקודת שפה.

תחום D נקרא סגור אם הוא כולל את כל הנקודות שעל השפה.

תחום D במרחב נקרא חסום אם הוא מוכל כולו בכדור עם רדיוס קבוע.

<u>משפט</u>

אם $f\left(x,y\right)$ היא פונקציה רציפה בתחום חסום וסגור D, אז יש ל f מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט ב D.

<u>מציאת ערכי קיצון מוחלטים של פונקציה רציפה f של שני משתנים בתחום חסום וסגור D</u>

<u>שלב א</u>

מצא את כל הנקודות הקריטיות של f הנמצאות בפנים של D.

<u>שלב ב</u>

מצא את כל הנקודות, שבהן יכול להתקבל ערך קיצון מוחלט.

<u>שלב ג</u>

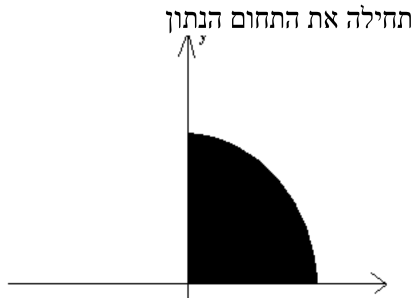
חשב את ערכי $f\left(x,y\right)$ בכל הנקודות שמצאת בשלבים הקודמים. הגדול בערכים אלו הוא מקסימום מוחלט, והקטן בהם הוא מינימום מוחלט.

<u>תרגיל</u>

נתונה פונקציה $f\left(x,y\right)=xy^2-y^2-\frac{x^2}{2}-2x+3$ מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה הנתונה בתחום החסום והסגור ע"י הקווים $x^2+y^2=4, x\geq 0, y\geq 0$.

<u>פתרון</u>

נשרטט תחילה את התחום הנתון



שלב א

בהרצאה קודמת ראינו הנקודות הקריטיות הן $\left(1,-\sqrt{3}\right),\left(1,\sqrt{3}\right),\left(-2,0\right)$ אך אף נקודה לא נמצאת בפנים של התחום.

שלב ב

נמצא את כל הנקודות שבהן יכול להתקבל ערך קיצון מוחלט בשפה.

$y=0$ הפונקציה היא $f\left(x,0\right)=\dfrac{x^2}{2}-2x+3 \Leftarrow f'\left(x,0\right)=x-2$ ולכן $\left(2,0\right)$ חשודה כאשר $y=0$.

$x=0$ הפונקציה היא $f\left(0,y\right)=-y^2+3 \Leftarrow f'\left(0,y\right)=-2y \Leftarrow y=0$ ולכן $\left(0,0\right)$ חשודה כאשר $x=0$.

הפונקציה היא $x^2+y^2=4$

$f\left(x,\sqrt{4-x^2}\right)=x\left(4-x^2\right)-\left(4-x^2\right)-\dfrac{x^2}{2}-2x+3=-x^3+\dfrac{x^2}{2}+2x-1$ (נשים לב שהתחום הוא $y\geq 0$ ולכן $y=\sqrt{4-x^2}$ על העקום $x^2+y^2=4$) ואז $f'\left(x,\sqrt{4-x^2}\right)=-3x^2+x+2$ נשווה לאפס ונקבל $-3x^2+x+2=0 \Leftarrow x_1=1, x_2=-\dfrac{2}{3}$ מכיוון שהתחום הנתון הוא $x\geq 0$ נקבל ש $x=-\dfrac{2}{3}$ לא בתחום, ולכן הנקודה החשודה היא: $\left(1,\sqrt{3}\right)$.

הנקודות החשודות הנוספות הן $\left(0,0\right),\left(0,2\right),\left(2,0\right)$ מכיוון שהן נקודות החיתוך של הישרים $x=0, y=0$ והעקום $x^2+y^2=4$.

סה"כ כל הנקודות החשודות הן: $\left(2,0\right),\left(0,0\right),\left(0,2\right),\left(1,\sqrt{3}\right)$.

נציב את הנקודות בפונקציה ונקבל $f\left(0,0\right)=3,\ f\left(2,0\right)=-3,\ f\left(0,2\right)=-1,\ f\left(1,\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

הערך הגדול ביותר הוא 3 והקטן ביותר הוא -3.

בעיית קיצון עם אילוצים

דוגמה לבעיית קיצון עם אילוצים

מצא את נקודות הקסט רימום של הפונקציה $z=x^2+y^2$ כאשר $x-2y-5=0$.

1. במקרה זה האילוץ הוא קו ישר על המישור XY. (לא תמיד האילוץ הוא קו ישר).
2. מבין כל הנקודות על הקו הישר מי הנקודה שעבורה הפונקציה תקבל ערך מקסימאלי\מינימאלי.

למשל: עבור הנקודה $\left(5,0\right)$ שנמצאת על הקו הישר ערך הפונקציה הוא 25 ועבור הנקודה $\left(7,1\right)$ שנמצאת על הקו הישר ערך הפונקציה 50.

בעיה – יש אינסוף נקודות על הקו הישר. מטרה מבין כל הנקודות על הקו הישר מי הנקודה שעבורה הפונקציה מקבלת ערך מקסימאלי\מינימאלי.

סימונים

נסמן את הפונקציה ע"י $z=f\left(x,y\right)$ בדוגמה $f\left(x,y\right)=x^2+y^2$.

נסמן את האילוץ ע"י $g\left(x,y\right)=0$ בדוגמה שלנו $g\left(x,y\right)=x-2y-5$.

פונקצית לגרנז' $L\left(x,y,\lambda\right)=f\left(x,y\right)+\lambda g\left(x,y\right)$ בדוגמה שלנו

$$L\left(x,y,\lambda\right)=x^2+y^2+\lambda\left(x-2y-5\right)$$

משפט (קיצון של פונקציה של שני משתנים בהינתן אילוץ)

תהיי נתונה הפונקציה $z = f(x,y)$, המוגדרת בתחום D, רציפה ובעלת נגזרות חלקיות הרציפות בו.

אם יש ל f קיצון מקומי בנקודה (x_0, y_0) בהינתן האילוץ $g(x,y)=0$ אז $L_x = L_y = L_\lambda = 0$.

<u>נחזור לדוגמא</u>

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x-2y-5)$ יש לפתור את המערכת $L_x = L_y = L_\lambda = 0$

ז"א $2x+\lambda = 0, 2y-2\lambda = 0, x-2y-5=0$. ולכן הנקודה היא $\left(-\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$.

בנוסף הנקודה צריכה לקיים את האילוץ $x-2y-5=0$ ולכן נפתור את המשוואה $-\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 5 = 0$ ז"א

$\lambda = -2$ ולכן הנקודה $(1,-2)$ חשודה לאקסטרימום של הפונקציה תחת האילוץ הנתון.

ע"י הצבת ערכים נוספים בפונקציה נקבל שערך הפונקציה בנקודה $(1,-2)$ הוא מינימאלי וערכו 5.

<u>תרגיל ממבחן</u>

מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $z = xy$ לאורך המעגל $x^2 + y^2 = 2a^2$ $(a>0)$.

<u>פתרון</u>

פונקצית לגרנז' היא $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2a^2\right)$.

$L_x = L_y = L_\lambda = 0$ ז"א $y + 2x\lambda = 0, x + 2y\lambda = 0, x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$.

נקבל ש $y = -2x\lambda \Leftarrow x - 4x\lambda^2 = 0$ ולכן האפשרויות שנקבל הם: $x = 0, \lambda = \pm\frac{1}{2}$.

אם $x = 0$ אז $y = 0$ וזה לא ייתכן מכיוון ש $x^2 + y^2 = 2a^2$.

אם $\lambda = \frac{1}{2}$ אז $x = -y$ ומהאילוץ $x^2 + y^2 = 2a^2$ $x = a, y = -a$ ואז $z = -a^2$ הוא הערך המינימאלי.

אם $\lambda = -\frac{1}{2}$ אז $x = y$ ומהאילוץ $x^2 + y^2 = 2a^2$ $x = a, y = a$ ואז $z = a^2$ הוא הערך המקסימאלי.

<u>תרגיל ממבחן</u>

מצא את המרחק הגדול ביותר בין נקודות המישור $z = 0$ למשטח $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$.

<u>פתרון</u>

יש למצוא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y,z) = z$ עם האילוץ

$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$ ז"א פונקצית לגרנז' היא

$L(x,y,z,\lambda) = z + \lambda\left(2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6\right)$.

$L_x = L_y = L_z = L_\lambda = 0$ ולכן יש לפתור את המערכת

$$\begin{cases} 4\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ 6\lambda y = 0 \\ 1 + 4\lambda z + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $y = 0$ ומהשנייה נקבל ש $z = -2x$ נציב במשוואה הרביעית ונקבל ש

$2x^2 + 8x^2 - 4x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow z = \mp 2$ ולכן המרחק המקסימאלי הוא 2.

<u>תרגיל</u>

נתונה הפונקציה $z = x^2 + y^2 + x^2 y$.

א. מצא אקסטרמומים לוקליים וברר את סוגם.

ב. בתחום החסום ע"י משולש שקודקודיו הם: $A(3,0), B(3,-3), C(0,0)$ מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.

<u>פתרון</u>

א. נמצא תחילה את הנקודות הקריטיות ז"א $z_x = z_y = 0$ $z_x = 2x+2xy, z_y = 2y+x^2$ נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x+2xy=0 \\ 2y+x^2=0 \end{cases}$

מהמשוואה הראשונה נקבל שתי אפשרויות $x=0, y=-1$.

מהמשוואה השנייה נקבל שאם $x=0$ אז $y=0$ ואם $y=-1$ אז $x=\pm\sqrt{2}$.

$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (2+2y)(2x) - (2x)^2 = 4x+4xy-4x^2$.

בנקודה $(0,0)$ $D=0$ ולכן לא ניתן לדעת, אבל $z(0,0)=0$. $z(a,a)=a^3$ ולכן עבור $a<0$ נקבל ערך קטן יותר מ $z(0,0)$ ועבור $a>0$ נקבל ערך גדול יותר מ $z(0,0)$.

בנקודה $(\pm\sqrt{2},-1)$ נקבל ש $D<0$ ולכן אין קיצון.

ב. ניתן לפתור גם ע"י כופלי לגרנז'