שיעור 7

מערכות משוואות ליניאריות

מערכת של m משוואות ב n נעלמים (מעל $\mathbb{F}$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

דוגמא 1

המערכת $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 21x_2 = 3 \end{cases}$ היא מערכת של שתי משוואות ב שני נעלמים כאשר

$a_{11} = 3, a_{12} = 2, a_{13} = -1, a_{21} = 1, a_{22} = 21, a_{23} = 0$.

סימונים והגדרות

- האיברים $a_{ij} \in \mathbb{F}$ $\left(i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n\right)$ נקראים מקדמי המשוואות.
- האיברים x_i $\left(i = 1,\ldots,n\right)$ נקראים נעלמים, או משתנים.
- האיברים $b_j \in \mathbb{F}$ $\left(j = 1,\ldots,m\right)$ נקראים קבועים, או איברים חופשיים.

הצגת מערכת משוואות בעזרת כפל מטריצות

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

הצגה מקוצרת למערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & & & & & . & . \\ . & & & & & . & . \\ . & & & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

הקו האנכי נועד להבדיל בין המקדמים לקבועים

דוגמא 2

את מערכת המשוואות מדוגמא 1 ניתן לרשום בעזרת כפל מטריצות: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 21 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ובהצגה מקוצרת: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 21 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

הגדרה

אם במערכת משוואות ליניאריות כל הקבועים שווים לאפס אז המערכת נקראת הומוגנית ואז ניתן לרשום את המערכת באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$ השמטנו את עמודת הקבועים והקו האנכי.

דוגמא

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$ המערכת הנ"ל היא מערכת משוואות הומוגנית.

ניתן לרשום את המערכת בעזרת כפל מטריצות $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

פתרון של משוואה ליניארית

תהיי $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ משוואה ליניארית.

פתרון של המשוואה הליניארית הוא קבוצת ערכים עבור הנעלמים, נאמר, $x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_n = k_n$ או, פשוט n-יה $u = (k_1, k_2, ..., k_n)$ של קבועים כך ש $a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_nk_n = b$.

קבוצת כל הפתרונות הללו נקראת קבוצת הפתרון או הפתרון הכללי.

דוגמא

$(2,-1)$ הוא פתרון של המשוואה $x_1 + 2x_2 = 0$ והפתרון הכללי הוא $\{(2t,-t) : t \in \mathbb{F}\}$.

פתרון של מערכת משוואות ליניאריות

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

פתרון למערכת שלעיל הוא קבוצת ערכים עבור הנעלמים, נאמר, $x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_n = k_n$ או n-יה $u = (k_1, k_2, ..., k_n)$ של קבועים, שמהווה פתרון לכל אחת מהמשוואות במערכת.

הקבוצה של כל הפתרונות הללו נקראת קבוצת הפתרון או הפתרון הכללי.

דוגמא

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$(0,0,0)$ מהווה פתרון למערכת.

מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים מעל שדה הממשיים

נראה תחילה כיצד ניתן למצוא את קבוצת הפתרון עבור מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים ואז נכליל למערכת של m משוואות ב n נעלמים.

נרשום את המערכת $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ מעל הממשיים.

המשמעות הגיאומטרית של המערכת הנ"ל היא שכל משוואה מייצגת ישר במישור.

אם הישרים נחתכים אז למשוואה יש פתרון יחיד שהוא נקודת החיתוך של שני הישרים.

אם הישרים מקבילים למערכת אין פתרון.

אם הישרים מתלכדים למערכת יש אינסוף פתרונות.

דוגמא

למערכת $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ יש פתרון יחיד.

למערכת $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ אין פתרון.

למערכת $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ יש אינסוף פתרונות.

נתונה המערכת $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$.

אם $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$ אז למערכת יש פתרון יחיד.

אם $a_1b_2-b_1a_2=0$ ובנוסף $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

אם $a_1b_2-b_1a_2=0$ ובנוסף $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ אז למערכת אין פתרון.

תרגיל

נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} m^2x-y=m \\ -4x+y=2 \end{cases}$

לאילו ערכי m למערכת:

א. קיים פתרון יחיד. מצאו מהו הפתרון היחיד.

ב. אין פתרון.

ג. קיימים אינסוף פתרונות.

פתרון

א. למערכת יש פתרון יחיד כאשר $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$. $m^2-4\neq 0 \Leftarrow m\neq\pm 2$.

נמצא את הפתרון היחיד. נחבר את שתי המשוואות ונקבל

$\left(m^2-4\right)x=m+2 \Rightarrow x=\frac{1}{m-2} \Rightarrow y=\frac{2m}{m-2}$ הפתרון של המערכת הוא $\left(\frac{1}{m-2},\frac{2m}{m-2}\right)$.

ב. כאשר $m=2$ נקבל $\begin{cases} 4x-y=2 \\ -4x+y=2 \end{cases}$ ואז $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ולכן אין פתרון למערכת.

ג. כאשר $m=-2$ נקבל $\begin{cases}4x-y=-2\\-4x+y=2\end{cases}$ ואז $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות.

<u>תרגיל</u>

הראה שלמערכת $\begin{cases}x-3y=4\\-2x+6y=-8\end{cases}$ יש אינסוף פתרונות ומצא את הפתרון הכללי לש המערכת.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $\frac{1}{-2}=\frac{-3}{6}=\frac{4}{-8}$ ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות.

הישרים מתלכדים ולכן מספיק למצוא פתרון כללי למשוואה $x-3y=4$ נסמן $y=a$ ואז $x=4+3a$.

הפתרון הכללי הוא $(4+4a,a)$.

<u>מערכת משוואות ליניאריות</u>

<u>הגדרה</u>

מערכות של משוואות נקראות שקולות אם יש להן בדיוק אותם פתרונות.

<u>דוגמא</u>

המערכות $\begin{cases}x-3y=4\\-2x+6y=-8\end{cases}$, $\begin{cases}3x-9y=12\\0\cdot x+0\cdot y=0\end{cases}$ שקולות מכיוון שיש להן בדיוק אותן פתרונות.

<u>פעולות שורה אלמנטריות</u>

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\.\\.\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

ניתן ליצור מערכת שהיא שקולה למערכת משוואות נתונה עם המשוואות הליניאריות $R_1,R_2,\ldots,R_m$ ע"י הפעלת סדר של הפעולות הבאות הנקראות פעולות שורה אלמנטריות.

- החלפת המשוואה ה - i והמשוואה ה - j זו בזו: $R_i\leftrightarrow R_j$.
- הכפלת המשוואה ה - i בסקלר שונה מאפס k: $kR_i\to R_i$, $k\neq 0$.
- החלפת המשוואה ה - i ב k פעמים המשוואה ה - j ועוד המשוואה ה - i: $(kR_j+R_i)\to R_i$.

<u>משפט</u>

נניח שמערכת $(\#)$ של משוואות ליניאריות מתקבלת ממערכת $(*)$ של משוואות ליניאריות באמצעות סדרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות. אזי ל - $(\#)$ ול - $(*)$ יש אותה קבוצת פתרון.

<u>הוכחה</u>

נשים לב תחילה שאם מערכת (1) שקולה למערכת (2) אז למערכת (1) ולמערכת (2) יש את אותה קבוצת פתרון. אם מערכת (2) שקולה למערכת (3) אז למערכת (2) ולמערכת (3) יש אותה קבוצת פתרון. סה"כ נקבל שלמערכת (1) ולמערכת (3) יש אותה קבוצת פתרון ואז המערכות (1) ו (3) שקולות, ולכן מספיק להראות שאם מערכת $(\#)$ מתקבלת ממערכת $(*)$ באמצעות פעולת שורה אלמנטרית אזי לשתי המערכות יש את אותה קבוצת פתרון.

נסמן $(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

- נניח שמערכת $(\#)$ מתקבלת ע"י החלפת המשוואה ה - i והמשוואה ה - j זו בזו: $R_i \leftrightarrow R_j$.

מכיוון ש $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ שייך לקבוצת הפתרון של $(*)$ הוא מקיים את כל המשוואות ב $(*)$.
המשוואות במערכת $(\#)$ זהות למשוואות במערכת $(*)$ (רק סדר המשוואות שונה) ולכן
$u=(k_1,k_2,...,k_n)$ שייך לקבוצת הפתרון של מערכת $(\#)$.
באותו אופן אם $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ שייך לקבוצת הפתרון של $(\#)$ אז הוא שייך לקבוצת הפתרון של $(*)$.
סה"כ קיבלנו שקבוצת הפתרון של שתי המערכות שוות, ולכן המערכות שקולות.

- נניח שמערכת $(\#)$ מתקבלת ע"י הכפלת המשוואה ה - i בסקלר שונה מאפס k : $kR_i \to R_i$,
$k \neq 0$. השורה ה - i היא השורה היחידה שהשתנתה בעקבות הפעולת שורה האלמנטרית.

יש לבדוק שאם $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ שייך לקבוצת הפתרון של $(*)$ אז הוא שייך לקבוצת הפתרון של $(\#)$
ולהפך. אם $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ שייך לקבוצת הפתרון של $(*)$ אז הוא מקיים כל המשוואות במערכת $(*)$
ובפרט הוא מקיים את המשוואה בשורה ה - i.
$$(ka_{i1})k_1+(ka_{i2})k_2+...+(ka_{in})k_n=k\cdot b_i \Leftarrow k\cdot(a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+...+a_{in}k_n)=k\cdot b_i \Leftarrow a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+...+a_{in}k_n=b_i$$
ולכן $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ הוא פתרון של המשוואה $(ka_{i1})x_1+(ka_{i2})x_2+...+(ka_{in})x_n=kb_i$.
מכיוון ש $k\neq 0$ ניתן לקבל את מערכת $(*)$ ממערכת $(\#)$ ע"י הפעולה $\frac{1}{k}R_i \to R_i$ מכיוון ש $\frac{1}{k}\neq 0$ נקבל
שאם $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ פתרון של מערכת $(\#)$ הוא גם פתרון של מערכת $(*)$.

- נניח שמערכת $(\#)$ מתקבלת ע"י החלפת המשוואה ה - i ב k פעמים המשוואה ה - j ועוד המשוואה ה - i : $(kR_j+R_i)\to R_i$.

אם $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ פתרון של מערכת $(*)$ אז מתקיים
$$(ka_{j1})k_1+(ka_{j2})k_2+...+(ka_{jn})k_n=kb_j \Leftarrow a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+...+a_{jn}k_n=b_j.$$
$$(ka_{j1})k_1+(ka_{j2})k_2+...+(ka_{jn})k_n+a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+...+a_{in}k_n=kb_j+b_i \Leftarrow a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+...+a_{in}k_n=b_i$$
ולכן $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ הוא פתרון של המשוואה
$$(ka_{j1}+a_{i1})x_1+(ka_{j2}+a_{i2})x_2+...+(ka_{jn}+a_{in})x_n=kb_j+b_i.$$
אם נבצע את הפעולה $(-kR_j+R_i)\to R_i$ נקבל את מערכת $(*)$ ממערכת $(\#)$, ולכן מההוכחה הקודמת
ניתן להסיק שאם $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ פתרון של מערכת $(\#)$ אז הוא פתרון של מערכת $(*)$.

<u>הערה</u>
משילוב של שתי פעולות שורה אלמנטריות ניתן לקבל את הפעולה האלמנטרית הבאה: החלפת המשוואה ה - i ב t פעמים המשוואה ה- j ועוד k $(k\neq 0)$ פעמים המשוואה ה- i : $(tR_j+kR_i)\to R_i, k\neq 0$.

<u>משוואה מנוונת</u>

משוואה ליניארית נקראת מנוונת אם היא מהצורה $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b$.

<u>הערה</u>

אם $b\neq 0$ אז למשוואה $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b$ אין פתרון.

אם $b=0$ אז כל n-יה $u=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & . & . & . & k_n\end{pmatrix}$ מהווה פתרון למשוואה.

<u>צורה מדורגת</u>

מערכת משוואות ליניארית היא בצורה מדורגת אם אף משוואה אינה מנוונת, ואם הנעלם המוביל (הנעלם הראשון עם מקדם שונה מאפס) בכל משוואה הוא מימין לנעלם המוביל במשוואה הקודמת.

<u>דוגמאות</u>

מערכת המשוואות $\begin{cases} x_5+4x_4+3x_3+2x_2-2x_1=1 \\ x_3+11x_2+x_1=-2 \\ x_2-3x_1=7 \end{cases}$ היא בצורב מדורגת.

מערכת המשוואות $\begin{cases} x_5+4x_4+3x_3+2x_2-2x_1=1 \\ 3x_5 \qquad\qquad\qquad\qquad =11 \\ x_2-3x_1=7 \end{cases}$ היא לא בצורה מדורגת מכיוון שהנעלם המוביל במשוואה הראשונה הוא לא מימין לנעלם המוביל במשוואה השנייה.

נפתור מערכת משוואות באמצעות שני צעדים:

צעד 1: שימוש בפעולות שורה אלמנטריות לקבלת מערכת מדורגת השקולה למערכת המקורית.

צעד 2: שימוש בהצבה לאחור כדי למצוא את פתרון המערכת הפשוטה יותר.

<u>דוגמא</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} 3x-2y+4z=-1 \\ 2x+y-5x=7 \\ -x+5y+z=-2 \end{cases}$.

צעד 1

ניתן לרשום את המערכת באופן הבא: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 7 \\ -1 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

נדרג את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 7 \\ -1 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{2R_1-3R_2\to R_2}{\overset{R_1+3R_3\to R_3}{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 23 & -23 \\ 0 & 13 & 7 & -7 \end{array}\right) \overset{13R_2+7R_3\to R_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 23 & -23 \\ 0 & 0 & 348 & -348 \end{array}\right).$$

צעד 2

מהמשוואה השלישית נקבל ש $348z=-348 \Leftarrow z=-1$.

מהמשוואה השנייה נקבל ש $-7y+23\cdot(-1)=-23 \Leftarrow y=0$.

מהמשוואה הראשונה נקבל ש $3x+(-2)\cdot 0+4\cdot(-1)=-1 \Leftarrow x=1$.

במערכת של משוואות ליניאריות בצורה מדורגת. קיימים שני מקרים:

א. מספר המשוואות שווה למספר הנעלמים. אז יש למערכת פתרון יחיד.

ב. יש פחות משוואות מאשר נעלמים. אז ניתן ליחס ערכים שרירותיים ל $n-r$ (r מייצג את מספר המשוואות, n מייצג את מספר הנעלמים) המשתנים החופשיים (משתנה חופשי הוא נעלם במערכת מדורגת שהוא אינו נעלם מוביל בשום משוואה) ולקבל פתרון למערכת.

<u>דוגמאות</u>

1. בדוגמא הקודמת דירגנו את מערכת המשוואות וקיבלנו מספר זהה של משוואות ונעלמים, ולכן למערכת הייה פתרון יחיד.
2. נתבונן במערכת $\begin{cases} x+4y-3z+2t=5 \\ z-4t=2 \end{cases}$. המערכת הנ"ל מדורגת עם שני משתנים חופשיים z,t

ז"א ניתן לקבוע ערכים שרירותיים ל y,t ולקבל פתרון למערכת.

למשל: $y=1,t=-1$. ממשוואה 2 נקבל ש $z=-2$, ממשוואה 1 נקבל ש $x=-3$.

קיבלנו פתרון למערכת $(-3,1,-2,-1)$.

אם נציב פרמטרים במקום המשתנים החופשיים נוכל לקבל את הפתרון הכללי.

נציב $y=a,t=b$. ממשוואה 2 נקבל ש $z=2+4b$ ממשוואה 1 נקבל ש $x=11-4a+10b$ ואז הפתרון הכללי הוא $(11-4a+10b,a,2+4b,b)$.

<u>שיטת האלימינציה של גאוס</u>

<u>צעד 1</u>

החלפת משוואות זו בזו, כך שהנעלם הראשון, x_1, יופיע עם מקדם שונה מאפס במשוואה הראשונה, כלומר $a_{11}\neq 0$.

<u>צעד 2</u>

השתמש ב a_{11} כציר על מנת לסלק את x_1 מכל המשוואות מלבד המשוואה הראשונה.

<u>צעד 3</u>

א. אם יש משוואה מנוונת $0x_1+0x_2+...+0x_n=0$ אז מחק את השורה מהמערכת.

ב. אם יש משוואה מנוונת $0x_1+0x_2+...+0x_n=b$ כך ש $b\neq 0$ סיימת אין פתרון למשוואה.

<u>צעד 4</u>

חזור על צעדים 1, 2 ו 3, עם תת המערכת הנוצרת ע"י כל המשוואות , מלבד המשוואה הראשונה.

<u>צעד 5</u>

המשך את התהליך שלעיל עד שהמערכת היא בצורה מדורגת או עד שמתקבלת משוואה מנוונת בצעד 3ב.

<u>תרגיל 1</u>

פתור את מערכת המשוואות ההומוגנית $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ 6x+7y-5z=0 \end{cases}$.

<u>פתרון</u>

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & -5 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-R_2\to R_2 \\ 3R_1-R_3\to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{2R_2-R_3\to R_3}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

המשתנה החופשי הוא z נסמן $z=t$ ונקבל $2y=t \Leftarrow y=\frac{t}{2}$.

נציב במשוואה הראשונה ונקבל $2x=-\frac{t}{2}+t \Leftarrow x=\frac{t}{4}$ והפתרון הכללי הוא $\left(\frac{t}{4},\frac{t}{2},t\right)=t\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right)$

<u>תרגיל 2</u>

פתור את מערכת המשוואות הלא הומוגנית $\begin{cases}2x+y-z=1\\2x+3y-2z=2\\6x+7y-5z=5\end{cases}$

<u>פתרון</u>

פתרון כללי של מערכת לא הומוגנית הוא פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית ועוד פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית $\begin{cases}2x+y-z=1\\2x+3y-2z=2\\6x+7y-5z=5\end{cases}$ הוא $(1,2,3)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה $\begin{cases}2x+y-z=0\\2x+3y-2z=0\\6x+7y-5z=0\end{cases}$ הוא $t\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right)$.

סה"כ קיבלנו שהפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית $\begin{cases}2x+y-z=1\\2x+3y-2z=2\\6x+7y-5z=5\end{cases}$ הוא

$$(1,2,3)+t\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right)$$

<u>תרגיל 3</u>

נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$ עם שני פרמטרים a,t.

מצא לאילו ערכים של a ו t יש למערכת

$$\begin{cases}x+ay+z=1\\ax+a^2y+z=2+a\\ax+3ay+z=2-t\end{cases}$$

א. פתרון יחיד.
ב. אין פתרון.
ג. אינסוף פתרונות. (במקרה של אינסוף פתרונות מצא את הפתרון הכללי)

<u>פתרון</u>

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&a&1&1\\a&a^2&1&2+a\\a&3a&1&2-t\end{array}\right)\underset{aR_1-R_3\to R_3}{\overset{aR_1-R_2\to R_2}{\approx}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&a&1&1\\0&0&a-1&-2\\0&a^2-3a&a-1&a+t-2\end{array}\right)\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1&a&1&1\\0&a^2-3a&a-1&a+t-2\\0&0&a-1&-2\end{array}\right)$$

א. אם בצור מדורגת מספר המשוואות שווה למספר הנעלמים אז למערכת יש פתרון יחיד.

כאשר $a\neq 0,1,3$ יש פתרון יחיד למערכת.

ב. יש לבחון את שלושת המקרים $a=0,a=1,a=3$.

כאשר $a=1$ נקבל מהמשוואה השלישית שאין פתרון למערכת.

כאשר $a=0$ נקבל את המערכת הבאה: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&0&-1&t-2\\0&0&-1&-2\end{array}\right)\overset{R_2-R_3\to R_3}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&0&-1&t-2\\0&0&0&t\end{array}\right)$

כאשר $a=0\wedge t\neq 0$ אין פתרון למערכת.

כאשר $a=3$ נקבל את המערכת הבאה: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&0&2&t+1\\0&0&2&-2\end{array}\right)\overset{R_2-R_3\to R_3}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&0&2&t+1\\0&0&0&t+3\end{array}\right)$.

כאשר $a=3\wedge t\neq -3$ אין פתרון למערכת.

ג.

$a=0\wedge t=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&0&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$ המשתנה החופשי הוא y נסמן $y=a$ ואז הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix}-1&a&2\end{pmatrix}$.

$a=3\wedge t=-3$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&0&2&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$ המשתנה החופשי הוא y נסמן $y=a$ ואז הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix}2-3a&a&-1\end{pmatrix}$.