

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

מבחן מועד ב' סמסטר ב' תש"ע

משך המבחן: שעתיים וחצי. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על שאלת הבונוס (שאלה 5). סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. The brachistochrone problem בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה (x_1, y_1) לנקודה (x_2, y_2) לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה
 $x(\phi) = -a(\phi - \sin \phi), y(\phi) = a(1 - \cos \phi), a < 0$

(א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה

(ב) הניחו פרמטריזציה $\phi(t) = \{0 \leq t \leq t_{1,2}^{cyc}; \phi(0) = 0, \phi(t_{1,2}^{cyc}) = \pi\}$

וחשבו את $t_{1,2}^{cyc} = \int_1^2 ds/v$

(ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc} = \sqrt{1 + 4/\pi^2}$

2. גוף נע בשני מימדים תחת פוטנציאל $U(x, y) = -10x^2 - 10y^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

(א) כתבו את הלגרנזיאן

(ב) העבירו את הלגרנזיאן לקואורדינטות פולריות r, θ

(ג) מהי הקואורדינטה הציקלית ומהו הגודל הנשמר?

(ד) נניח שתנועת הגוף מוגבלת לציר ה- x בלבד (כלומר הפוטנציאל הוא $U(x) = -10x^2 + x^4$) מהן נקודות שיווי המשקל, האם הן יציבות? מהי תדירות התנודות הקטנות סביב שיווי המשקל?

3. הוכיחו את התכונות הבאות של יחסי חילוף

(א) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

(ב) זהות יעקובי $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$

(ג) אם $[B, [A, B]] = 0$ אז $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$

(רמז: הגדירו $g_n = [A, B^n]$, הוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה
 $g_n = nB^{n-1}g_1 + g_1B^{n-1}$ והשתמשו בה כדי להראות כי $[B, g_1] = 0$ כאשר $g_1 = [A, B]$.)

4. משוואת שרדינגר נתונה ע"י

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \equiv -\frac{p^2}{2m} |\psi\rangle + V(x) |\psi\rangle$$

(א) חשבו מהם $[x, p^2]$, $[x, V(x)]$?

(ב) הראו כי עבור ערכי התצפית מתקיים $\frac{\partial}{\partial t} \langle x \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$ (כמו במכניקה קלאסית)
רמז: $\frac{\partial}{\partial t} \langle x \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | x | \psi \rangle$ כאשר x לא תלוי מפורשות ב- t ומשוואת שרדינגר קובעת את הנגזרת של ψ .

5. (בונוס - לא חובה) מטוטלת באורך ℓ קשורה לתקרת קרון הנע רגעית במהירות של $v = 10 \frac{m}{s}$ ובתאוצה של $a = 6 \frac{m}{s^2}$ מזרחה. מהי תדירות התנודות של המטוטלת (בקירוב זוויות קטנות).

בהצלחה