<u>תרגיל בית להגשה בתרגול 10/12.5</u>

<u>שאלה 1</u>

הוכח או הפרך: אם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס, אזי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

<u>פתרון</u>

הדוגמא הנ"ל מראה שאם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס, אזי לא בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

נסתכל על הפונקציה $f(x)=\sin(x^2)$.

הגבול לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\sin(x^2)\to$

נסתכל על $\int_1^\infty \sin(x^2)dx$.

$$(*)\quad \int \sin(x^2)dx \underset{\substack{x^2=t\\ x=\sqrt{t}\\ dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}}{=} \int \sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}}dt$$

נשאר להראות ש $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ מתכנס.

נסמן: $f(x)=\sin x$ ו $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

$f(x)$ ו $g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[1,b]$ לכל $b>1$.

$$\left|\int_1^\infty f(x)dx\right|=\left|\int_1^\infty \sin x dx\right|=\left|\lim_{b\to\infty}\int_1^b \sin x dx\right|=\left|\lim_{b\to\infty}(-\cos x)\Big|_1^b\right|=\left|-\lim_{b\to\infty}\cos b+\cos 1\right|\le 2$$

$g(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ היא פונקציה מונוטונית ומקיימת $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=0$.

לפי מבחן דריכלה $\Leftarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ מתכנס.

<u>שאלה 2</u>

הוכח כי $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4} < 1+\frac{\pi}{4}$.

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב ש

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4} + \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}$$

מכיוון ש $x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4 \ge 0$ לכל x נקבל ש

$1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4 \ge 1$

ואז $\frac{1}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4} \le 1$ ולכן

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4} \le \int_0^1 dx = 1$.

מכיוון ש $\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3 > 1$

(ניתן לקבל זאת ע"י חקירת הפונקציה $f(x)=\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3$) נקבל ש

$1+x^2\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4 > 1+x^2$ ולכן

ואז $\frac{1}{1+x^2\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4} < \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4} < \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[\arctan b-\arctan 1\right] = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

.