טופולוגיה (נוביק)

גברת לואי פולב

הרכב הציון: אין חובת הגשה בתרגילים. יהיה בוחן באמצע הסמסטר, שיהיה שווה 10%-15%. שווה להכין שיעורי בית כי הבוחן והמבחן יכללו שאלות שפתרנו בשיעורי הבית.

חזרה מבדידה:

הגדרה: תהי $f: X \to Y$ פונקציה. יהיו $A \subseteq X, B \subseteq Y$ אז $f(A) = \{f(x): x \in A\}, f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$

טענה: 1. אם $A \subseteq B \subseteq Y$ אזי $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B] \subseteq X$

2. אם $A \subseteq B \subseteq X$ אזי $f(A) \subseteq f(B) \subseteq Y$

הוכחה: נוכיח רק את 1: יהי $x \in f^{-1}[A]$, אזי $f(x) \in A$ לפי הגדרה. ולכן $f(x) \in B$ (שכן $A \subseteq B$). ולכן $x \in f^{-1}[B]$ (לפי הגדרה). מ.ש.ל. ■

טענה: $f^{-1}[\cup_{i\in I} B_i] = \cup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$.

הוכחה: ע"י הכלה דו כיוונית. $\supseteq$1: ברור שמתקיים כי $\cup_{i\in I} B_i \supseteq B_i$ לכל $i \in I$. לפי הטענה הקודמת לכל $i \in I$ מתקיים $f^{-1}[B_i] \subseteq f^{-1}[\cup_{i\in I} B_i]$ ולכן $\cup_{i\in I} f^{-1}[B_i] \subseteq f^{-1}[\cup_{i\in I} B_i]$.

בכיוון השני: $\subseteq$: יהי $x \in f^{-1}[\cup_{i\in I} B_i]$ ולכן $f(x) \in \cup_{i\in I} B_i$ קיים $i_0 \in I$ כך ש $f(x) \in B_{i_0}$ ולכן $x \in f^{-1}[B_{i_0}]$ ולכן $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$. הוכחנו הכלה דו כיוונית, מ.ש.ל. ■

טענה: $f^{-1}[\cap_{i\in I} B_i] = \cap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$

הוכחה: $\subseteq$: $\forall i \in I\ \cap_{i\in I} B_i \subseteq B_i$ ולכן לפי הטענה: $\forall i \in I\ f^{-1}[\cap_{i\in I} B_i] \subseteq f^{-1}[B_i]$ ומכאן $f^{-1}[\cap_{i\in I} B_i] \subseteq \cap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$.

לכיוון השני: $\supseteq$: יהי $x \in \cap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$ ולכל $i \in I$ $x \in f^{-1}[B_i]$ ולכן לכל $i \in I$ מתקיים $f(x) \in B_i$ ולכן $f(x) \in \cap_{i\in I} B_i$ ולכן לפי הגדרה נקבל $x \in f^{-1}[\cap_{i\in I} B_i]$. מ.ש.ל. ■

טענה: 1. $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$

2. לא בהכרח מתקיים $f(\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} f(A_i)$

הוכחה: 1. לא נוכיח זו הוכחה דומה למה שעשינו בטענה הקודמת.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש $f(x) = 2$ עבור $A_1 = (0,1), A_2 = (2,8)$ מ.ש.ל. ■

מרחבים מטריים:

הגדרה: מרחב מטרי. תהי M קבוצה כלשהי ונניח שמוגדרת פונקציה $d: M \times M \to [0,\infty)$ המקיימת:

1. $\forall x,y \in M : d(x,y) = 0$ אמ"מ x=y
2. $\forall x,y \in M : d(x,y) = d(y,x)$
3. אש"מ: $\forall x,y,z \in M: d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

במקרה זה נאמר ש (M,d) הוא מרחב מטרי (מ"מ) ו-d היא מטריקה על M.

תרגיל : תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה . הוכיחו שאם f חח״ע אזי הפונקציה $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$.

פתרון : נוכיח את התנאים לפי סדר.

1. $d(x,y)=0$ או״א $|f(x)-f(y)|=0$ או״א $f(x)=f(y)$ או״א $x=y$.
2. הסימטריות ברורה ונובעת מהערך המוחלט.
3. $d(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(z)+f(z)-f(y)|\le|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|=d(x,z)+d(y,z)$

מ.ש.ל. ■

שימו לב שהטענה בתרגיל היא למעשה דו כיוונית, כלומר f חח״ע או״א הפונקציה $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$.

- הפונקציה $d(x,y)=|x^2-y^2|$ אינה מטריקה על $\mathbb{R}$ כי $d(1,-1)=0$ למרות ש$1\neq-1$. עם זאת, $d(x,y)=|x^3-y^3|$ היא אכן מטריקה.

הגדרה : מטריקה פי-אדית (P אדית , P-adic).

עבור p ראשוני נגדיר מטריקה על $\mathbb{Z}$ באופן הבא : $\forall x,y\in\mathbb{Z}: d_p(x,y)=\begin{cases}0\,, x=y\\ \frac{1}{p^{k(x,y)}}\,, x\neq y\end{cases}$ כאשר $k(x,y)=\max\limits_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\{i: p^i|(x-y)\}$.

- למשל : $d_3(13,17)$. $k(13,17)=\max\{i:3^i|-4\}=0$ ולכן $d_3(13,17)=\frac{1}{3^0}=1$. כמו כן, $d_3(13,17)=\frac{1}{3^0}=1\,, d_3(13,16)=\frac{1}{3}, d_3(13,22)=\frac{1}{3^2}=9$

תרגיל : הוכיחו שזו מטריקה.

- הדרכה : הראו כי $k(x,z)\ge\min\{k(x,y),k(y,z)\}$ והסיקו $d(x,z)\le\max\{d(x,y),d(y,z)\}$

פתרון : נוכיח רק את אש״מ. נסמן :

$k(x,z)=\max\{i:p^i|x-z\}=k\,, k(x,y)=\max\{i:p^i|x-y\}=m\,, k(y,z)=\max\{i:p^i|y-z\}=n$.
לפי הסימונים שבחרנו, מתקיים כי $p^k|x-z\,, p^m|x-y, p^n|y-z$. מתקיים כי

$p^{\min\{m,n\}}|x-y\ \wedge\ p^{\min\{m,n\}}|y-z$ ולכן מחלק את הסכום שלהם $p^{\min\{m,n\}}|x-z$. ולפי ההגדרה של k נקבל $k\ge\min\{m,n\}$ ולכן $k(x,z)\ge\min\{k(x,y),k(y,z)\}$ ואז $\frac{1}{p^{k(x,z)}}\le\frac{1}{p^{\min\{k(x,y),k(y,z)\}}}=\max\left\{\frac{1}{p^{k(x,y)}},\frac{1}{p^{k(y,z)}}\right\}$
ומכאן נובע $d(x,z)\le\max\{d(x,y),d(y,z)\}\le d(x,y)+d(y,z)$. מ.ש.ל. ■

תרגיל : יהי S אוסף כל הסדרות הממשיות. תהי $d:S\times S\to[0,\infty)$ פונקציה המוגדרת על ידי $d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)}$ כאשר $x=(x_1,x_2,..), y=(y_1,y_2,..)$. הראו ש-d מטריקה על S.

הוכחה : נוכיח שהטור אכן מתכנס. ניתן לראות ש- $\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\le\frac{1}{2^i}$ מתקיים תמיד, ולכן ממבחן השוואה הראשון נובע שהטור הנתון מתכנס. את שתי התכונות הראשונות של מטריקה לא נוכיח, זה די טריוויאלי. נוכיח רק את אי שוויון המשולש תוך שימוש בלמה הבאה :

למה : לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים : $\frac{|a-b|}{1+|a-b|}\le\frac{|a-c|}{1+|a-c|}+\frac{|b-c|}{1+|b-c|}$.

נמשיך בהוכחת התרגיל: נציב בלמה $a = x_i, b = y_i, c = z_i$ ונקבל $\frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} \le \frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|}\right)$ נעבור לסכומים ונקבל את הדרוש.

כעת נעבור להוכחת הלמה:

נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{x}{1+x}$ בתחום $x \ge 0$. זו פונקציה עולה, ולכל $t, s, w \ge 0$ אם $t \le s + w$ מתקיים $f(t) \le$ $f(s+w) = \frac{s+w}{1+s+w} = \frac{s}{1+s+w} + \frac{w}{1+s+w} \le \frac{s}{1+s} + \frac{w1}{1+w} = f(s) + f(w)$. נקבל את הלמה ע״י ההצבה $t = |a-b|, s = |a-c|, w = |b-c|$. מ.ש.ל. ■

הגדרה: מרחב נורמי. יהי X מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). נגדיר פונקציה $||\cdot||: X \to [0,\infty)$ המקיימת:

1. $||v|| = 0$ אוי״א v=0.
2. $\forall v \in X\ \forall \alpha \in \mathbb{F} : ||\alpha V|| = |\alpha| \cdot ||v||$
3. אש״מ: $\forall v, u \in X : ||v+u|| \le ||v|| + ||u||$.

במקרה זה נאמר ש $(X, ||\cdot||)$ הוא מרחב נורמי ו $||\cdot||$ היא נורמה על X.

- בהינתן נורמה $||\cdot||$ ניתן להגדיר באמצעותה מטריקה $d(x,y) = ||x-y||$ ו-d תקרא *המטריקה המושרת*.

תרגיל: יהי $X = \{(x_n): x_n \in \mathbb{R}, \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$ מרחב וקטורי של סדרות ממשיות חסומות. הוכיחו כי הפונקציה הבאה מגדירה נורמה על מרחב זה: $||(x_n)|| = \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$.

הוכחה: נוכיח את התנאים שהגדרנו.

1. $||(x_n)|| = 0$ אוי״א $\sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\} = 0$ אוי״א $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n = 0$ אוי״א $(x_n) = \bar{0}$ (זוהי סדרת ה-0).
2. $||\alpha(x_n)|| = ||(\alpha x_n)|| = \sup\{|\alpha x_n|: n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \cdot ||(x_n)||$
3. צ״ל להוכיח: $||(x_n) + (y_n)|| \le ||(x_n)|| + ||(y_n)||$, או על פי הגדרה $\sup\{|x_n + y_n|: n \in \mathbb{N}\} \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\} + \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|y_n|\}$. עבור $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\} + \sup_{n\in\mathbb{N}}\{y_n\}$ ולכן $\sup\{|x_n + y_n|: n \in \mathbb{N}\} \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\} + \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|y_n|\}$ לפי הגדרת הסופרימום, וזה מסיים את ההוכחה.
   מ.ש.ל. ■