פתרון תרגיל בית 7 – טופולוגיה

שאלה 1

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב- X. נגדיר

$\tau=\{A\subseteq X: x_0\notin A\}\cup\{B\subseteq X: X\setminus B \text{ is finite}\}$.

א. הוכיחו ש- τ טופולוגיה על X.

ב. הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם סגורים. מה לגבי $\{x_0\}$?

ג. הראו: $cl(A)=\begin{cases} A & A \text{ is finite} \\ A\cup\{x_0\} & \text{otherwise}\end{cases}$.

ד. הראו: $int(A)=\begin{cases} A & X\setminus A \text{ is finite} \\ A\setminus\{x_0\} & \text{otherwise}\end{cases}$.

פתרון

א. נראה שמתקיימות 3 התכונות של טופולוגיה:

1) $\varnothing\in\tau$ שכן $x_0\notin\varnothing$. $X\in\tau$ שכן $X\setminus X=\varnothing$ סופית.

2) יהיו $O_1,O_2\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. $x_0\notin O_1$ או $x_0\notin O_2$. במקרה זה $x_0\notin O_1\cap O_2$ ומכאן $O_1\cap O_2\in\tau$.

2. $X\setminus O_1, X\setminus O_2$ סופיות. במקרה זה נקבל ש-
$$X\setminus(O_1\cap O_2)=X\setminus O_1\cup X\setminus O_2$$
סופית כאיחוד סופי של סופיות וגם במקרה זה נקבל ש- $O_1\cap O_2\in\tau$.

3) נניח שלכל $i\in I$ מתקיים $O_i\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. לכל $i\in I$ $x_0\notin O_i$, במקרה זה נקבל $x_0\notin\bigcup_{i\in I}O_i$ ומכאן $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

2. קיים i_0 כך ש $X\setminus O_{i_0}$ סופית אבל במקרה זה נסיק ש- $X\setminus\bigcup_{i\in I}O_i\subseteq X\setminus O_{i_0}$ סופית. לכן, גם במקרה זה $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

ב. תהי $x_1 \neq x_0$ נראה ש $\{x_1\}$ סגורה. $\{x_1\}$ פתוחה שכן $x_0 \notin \{x_1\}$.

$\{x_1\}$ סגורה- נוכיח זאת על-ידי כך שנראה כי $X \setminus \{x_1\}$ פתוחה. מתקיים $X \setminus (X \setminus \{x_1\}) = \{x_1\}$ סופית ולכן $X \setminus \{x_1\}$ פתוחה.

נראה כעת ש- $\{x_0\}$ סגורה ואינה פתוחה.

סגורה- בדיוק כפי שמוכיחים ש- $\{x_1\}$ סגורה. $\{x_0\}$ אינה פתוחה שכן $x_0 \in \{x_0\}$ וכמו כן $X \setminus \{x_0\}$ אינסופית כי X אינסופית.

ג. נפרק לשני מקרים:

A סופית:

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A$, ואנחנו נראה זאת ע"י כך שנראה כי A סגורה. ואכן, $A = X \setminus (X \setminus A)$ סופית, לכן $X \setminus A$ פתוחה ולכן A סגורה.

A אינסופית:

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A \cup \{x_0\}$. נראה כי $A \cup \{x_0\}$ היא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A. תחילה נשים לב כי אם A אינסופית וכן $x_0 \notin A$, אזי A אינה סגורה. אכן, אם נניח בשלילה כי היא סגורה, נקבל ש-$X \setminus A$ פתוחה. אך $x_0 \in X \setminus A$ ולכן בהכרח מתקיים $X \setminus (X \setminus A)$ סופית. אבל אז נקבל ש-A סופית, בסתירה לנתון.

כעת, נראה כי $A \cup \{x_0\}$ סגורה. מתקיים $x_0 \notin X \setminus (A \cup \{x_0\})$ ולכן $X \setminus (A \cup \{x_0\})$ פתוחה, ולכן $A \cup \{x_0\}$ סגורה. מצד שני, אם $x_0 \in A$ אז ממילא A סגורה (למה?) ומתקיים $cl(A) = A = A \cup \{x_0\}$

ד. גם כאן יש שני מקרים:

$X \setminus A$ סופית:

במקרה זה, A היא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה) ולכן $int(A) = A$.

$X \setminus A$ אינסופית:

נראה $A \setminus \{x_0\}$ תת קבוצה פתוחה מקסימלית של A ומכאן $int(A) = A \setminus \{x_0\}$.

<u>פתוחה:</u>

$x_0 \notin A\setminus\{x_0\}$ ולכן $A\setminus\{x_0\}$ פתוחה.

<u>מקסימלית</u>:

אם $A\setminus\{x_0\}=A$ אז המקסימליות ברורה.

אם $A\setminus\{x_0\}\neq A$ אז A לא פתוחה (שכן במקרה זה $x_0\in A$ וגם אנו תחת ההנחה ש-$X\setminus A$ אינסופית.)

ומכאן $A\setminus\{x_0\}$ הפתוחה המקסימלית המוכלת ב-A.

<u>שאלה 2</u>

יהי X מ"ט ותהי $A\subseteq X$. תהי $\chi_A : X\to\{0,1\}$ פונקציה אופיינית המוגדרת על-ידי $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$. יהי $x\in X$.

א. הוכיחו שאם χ_A רציפה ב-x אז $x\notin\partial(A)$.

ב. הוכיחו ש χ_A רציפה <u>אמ"מ</u> $\partial(A)=\varnothing$ <u>אמ"מ</u> A סגוחה ב-X.

ג. הסיקו שאם X לא קשיר אז קיימת פונקציה רציפה ועל $f:X\to\{0,1\}$.

<u>פתרון</u>

א. נחלק למקרים: מקרה ראשון- $x\in A$. לכן, $\chi_A(x)=1$. מהרציפות בנקודה x ומכיון ש-$\{1\}$ היא סביבה של 1 נקבל שקיימת V סביבה של x כך ש-$\chi_A(V)\subseteq\{1\}$. מכאן נובע ש-$x\in V\subseteq A$. לכן, $x\in\operatorname{int}(A)$ ולכן $x\notin\partial(A)$.

מקרה שני- $x\notin A$. לכן, $\chi_A(x)=0$. מהרציפות בנקודה x ומכיון ש-$\{0\}$ היא סביבה של 0 נקבל שקיימת V סביבה של x כך ש-$\chi_A(V)\subseteq\{0\}$.

מכאן נובע ש $V\cap A=\varnothing$ ולכן $x\notin cl(A)$ ובסה"כ $x\notin\partial(A)$.

ב. עפ"י סעיף א' ומה שהוכחנו בתרגול χ_A רציפה ב-x אמ"מ $x\notin\partial(A)$.

כעת, χ_A רציפה אמ"מ χ_A רציפה ב-x לכל $x\in X$ וזה אמ"מ $x\notin\partial(A)$ לכל $x\in X$. התנאי האחרון מתקיים אמ"מ $\partial(A)=\varnothing$.

נוכיח את טענת העזר הבאה ונסיים את ההוכחה.

<u>טענת עזר</u>: $\partial(A)=\varnothing$ אמ"מ A סגוחה.

<u>הוכחת טענת עזר</u>:

$\Rightarrow$ אם A סגוחה אז היא סגורה ופתוחה. מכאן $A=cl(A)$ וגם $A=\operatorname{int}(A)$.

מכאן $\partial(A)=cl(A)\setminus int(A)=\varnothing$.

$\Leftarrow$ תמיד מתקיים $\operatorname{int}(A)\subseteq A\subseteq cl(A)$ ולכן אם $\partial(A)=cl(A)\setminus int(A)=\varnothing$

נקבל ש $\operatorname{int}(A)=cl(A)$ ומכאן גם $\operatorname{int}(A)=A=cl(A)$ ולכן A סגוחה.

מש"ל הוכחת טענת עזר.

הערה: ניתן היה לפתור את התרגיל בשימוש ברציפות גלובלית ובכך שרציפות שקולה לכך שתמונה הפוכה של פתוחה (סגורה) היא פתוחה (בהתאמה סגורה).

ג. אם X לא קשיר אז קיימת סגוחה לא טריוויאלית A ואז עפ"י סעיף ב' הפונקציה $\chi_A:X\to\{0,1\}$ רציפה. מכיון ש $\varnothing\neq A\neq X$ נקבל ש- $\chi_A:X\to\{0,1\}$ על (מדוע?).

<u>שאלה 3</u>

יהי X מ"ט, ותהיינה $A,B\subseteq X$ ת"ק.

א. הוכיחו כי מתקיים $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

ב. הראו על ידי דוגמה נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בסעיף א' בשיוויון.

ג. נסחו והוכיחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור $int(A\cup B)$.

<u>פתרון</u>

א. $A\cap B\subseteq A\subseteq cl(A),\ A\cap B\subseteq B\subseteq cl(B)$ ולכן $A\cap B\subseteq cl(A)\cap cl(B)$. מכיוון ש-$cl(A)\cap cl(B)$ סגורה, מקבלים הדרוש.

ב. נתבונן במרחב המטרי $\mathbb{R}$ ויהיו $\begin{cases}A=(0,1)\\B=(1,2)\end{cases}$ אזי $A\cap B=\varnothing \Leftarrow cl(A\cap B)=\varnothing$

$\begin{cases} cl(A)=[0,1] \\ cl(B)=[1,2] \end{cases}$ ולכן $cl(A)\cap cl(B)=\{1\}$ ומתקיים

$\{1\}=cl(A)\cap cl(B)\not\subset cl(A\cap B)=\varnothing$.

ג. <u>טענה</u>: $\text{int}(A)\cup\text{int}(B)\subseteq\text{int}(A\cup B)$.

<u>הוכחה</u>: $A\subseteq A\cup B$ וגם $\text{int}(A)\subseteq A$ (לפי ההגדרה של הפנים) ולכן $\text{int}(A)\subseteq A\cup B$. אך $\text{int}(A)$ זו קבוצה פתוחה שמוכלת ב-$A\cup B$ ולכן $\text{int}(A)\subseteq\text{int}(A\cup B)$. באותו אופן מראים ש-$\text{int}(B)\subseteq\text{int}(A\cup B)$ וזה מסיים את ההוכחה.

<u>שאלה 4</u>

יהיו X,Y מ"ט, ותהי $f:X\to Y$ הומאומורפיזם. הוכיחו כי לכל $A\subseteq X$ מתקיים:

א. $f(\text{int}(A))=\text{int}(f(A))$

ב. $f(cl(A))=cl(f(A))$

ג. $(\text{int}(A))^C=cl(A^C)$

ד. $\text{int}(A^C)=(cl(A))^C$

<u>פתרון</u>

א. $f:X\to Y$ הומיאו' ובפרט פונקציה פתוחה ולכן $f(\text{int}(A))$ פתוחה. כמו כן $\text{int}(A)\subseteq A$ ולכן $f(\text{int}(A))\subseteq f(A)$. בסה"כ נקבל ש- $f(\text{int}(A))$ פתוחה המוכלת ב $f(A)$ ולכן $f(\text{int}(A))\subseteq\text{int}(f(A))$. נוכיח את ההכלה ההפוכה ונקבל שוויון.

באופן דומה, מכיון ש- f הומיאו' אז f^{-1} פתוחה ומכאן $f^{-1}(\text{int}(B))\subseteq\text{int}(f^{-1}(B))$ לכל $B\subseteq Y$. נציב $B=f(A)$ ונקבל

$f^{-1}\left(\operatorname{int}\left(f\left(A\right)\right)\right)\subseteq \operatorname{int}\left(A\right)$. נפעיל f על שני האגפים ונקבל ש-

$\operatorname{int}\left(f\left(A\right)\right)\subseteq f\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)$. בסה"כ $f\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)=\operatorname{int}\left(f\left(A\right)\right)$.

ב. נוכיח סעיף זה באמצעות סעיף א' שהוכחנו וסעיפים ג' ו- ד' שנוכיח בהמשך (שימו לב שבכל אחד מהסעיפים האלו ניתן להציב כל תת קבוצה של X). מכיון ש- f הפיכה מתקיים

$f\left(cl\left(A\right)\right)=f\left(\left(\left(cl\left(A\right)\right)^C\right)^C\right)=\left(f\left(\left(cl\left(A\right)\right)^C\right)\right)^C$. כעת, מסעיף ד'

$\left(f\left(\left(cl\left(A\right)\right)^C\right)\right)^C=\left(f\left(\operatorname{int}\left(A^C\right)\right)\right)^C$. מסעיף א'

$\left(f\left(\operatorname{int}\left(A^C\right)\right)\right)^C=\left(\operatorname{int}\left(f\left(A^C\right)\right)\right)^C$. מסעיף ג'

$\left(\operatorname{int}\left(f\left(A^C\right)\right)\right)^C=cl\left(\left(f\left(A^C\right)\right)^C\right)=cl\left(f\left(\left(A^C\right)^C\right)\right)=cl\left(f\left(A\right)\right)$.

ג. $\operatorname{int}\left(A\right)$ פתוחה ומוכלת ב- A ולכן $\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)^C\supseteq A^C$ וגם $\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)^C$ סגורה.

מכאן, $\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)^C\supseteq cl\left(A^C\right)$. נוכיח כעת את ההכלה ההפוכה

$\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)^C\subseteq cl\left(A^C\right)$. יהי $x\in\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)^C$ אזי $x\notin \operatorname{int}\left(A\right)$ ולכן לכל סביבה U של x מתקיים $U\not\subset A$. כלומר, לכל סביבה U של x מתקיים $U\cap A^C\neq\varnothing$.

מכאן, $x\in cl\left(A^C\right)$.

<u>דרך נוספת לפתרון:</u>

$$\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)^C=\left(\bigcup_{\substack{U\subseteq A\\ U\ open}}U\right)^C=\bigcap_{\substack{U\subseteq A\\ U\ open}}U^C=\bigcap_{\substack{U^C\supseteq A^C\\ U^C\ closed}}U^C=\bigcap_{\substack{V\supseteq A^C\\ V\ closed}}V=cl\left(A^C\right)$$

ד. נשים לב שסעיף ג' שהוכחנו נכון לכל תת קבוצה של X . בפרט,

$\left(\operatorname{int}\left(A^C\right)\right)^C=cl\left(\left(A^C\right)^C\right)=cl\left(A\right)$. קיבלנו ש- $\left(\operatorname{int}\left(A^C\right)\right)^C=cl\left(A\right)$. ולבסוף

נקבל ש- $\operatorname{int}\left(A^C\right)=\left(\left(\operatorname{int}\left(A^C\right)\right)^C\right)^C=\left(cl\left(A\right)\right)^C$ כדרוש.

[גם כאן יש דרך נוספת כמו בסעיף הקודם. נסו בעצמכם.]

שאלה 5

יהי X מרחב טופולוגי, U קבוצה פתוחה וְ-A קבוצה צפופה.

א. הוכיחו $U \subseteq cl(A \cap U)$ והסיקו: $cl(U) = cl(A \bigcap U)$.

ב. אפיינו את המרחבים הטופולוגיים X עבורם הקבוצה הצפופה היחידה היא X עצמה. הוכיחו את תשובתכם.

פתרון

א. נניח בשלילה שקיים $u \in U$ ו- $u \notin cl(A \cap U)$. אזי קיימת סביבה O של u כך ש $A \cap O \cap U = \varnothing$. כעת, U פתוחה ו- $u \in U$ ולכן גם U סביבה של u. לכן, $V := U \cap O$ סביבה של u המקיימת $A \cap V = \varnothing$. בסתירה לכך ש-A צפופה (אחד מהקריטריונים לצפיפות הוא: A צפופה אם ורק אם $A \cap W \neq \varnothing$ לכל W פתוחה ולא ריקה. אצלנו, V פתוחה ולא ריקה).

מכאן $U \subseteq cl(A \cap U)$.

__הוכחת המסקנה:__ $A \cap U \subseteq U$ ומכאן $cl(A \cap U) \subseteq cl(U)$ נוכיח את ההכלה הפוכה ונקבל הדרוש.

$cl(A \cap U)$ סגורה המכילה את U ומכאן $cl(U) \subseteq cl(A \cap U)$. בסה"כ $cl(U) = cl(A \cap U)$.

ב. תכונה זו מאפיינת את המרחבים הטופולוגיים הדיסקרטיים. נוכיח זאת. בכיוון הראשון, יהי X מ"ט דיסקרטי ותהי $A \subseteq X$ קבוצה צפופה, כלומר $cl(A) = X$. מכיוון שכל קבוצה בטופולוגיה הדיסקרטית היא סגורה, נקבל $cl(A) = A$ ולכן $A = X$ כנדרש. בכיוון השני: יהי X מ"ט המקיים את התכונה (הקבוצה הצפופה היחידה היא המרחב כולו) ונוכיח שהוא דיסקרטי. יהי $x \in X$ ונראה ש-$\{x\}$ היא קבוצה פתוחה. נתבונן בקבוצה $X \setminus \{x\} \subseteq X$. אם $X \setminus \{x\}$ סגורה – סיימנו. אחרת $X \setminus \{x\} \subset cl(X \setminus \{x\})$ (הכלה ממש), ולכן $cl(X \setminus \{x\}) = X$, מה שאומר, לפי הנתון, ש-$X \setminus \{x\} = X$ וזו סתירה.

שאלה 6

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl(B(a,r)) = B[a,r]$. מצאו דוגמה נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

<u>פתרון</u>

נראה קודם דוגמה נגדית במרחב מטרי שאינו נורמי: נבחר $X=\{a,b\}$ עם המטריקה הדיסקרטית: $d(a,b)=1$. אזי נבחר את הכדור הפתוח $B(a,1)$ ומתקיים $B(a,1)=\{a\}$ ולכן סגור.

שימו לב: סגור של קבוצה סגורה הוא הקבוצה עצמה ולכן $cl(B(a,1))=cl(\{a\})=\{a\}$ (כמו כן, יכולתם לראות שזה הסגור דרך הקריטריון של הסדרות). מאידך, $B[a,1]=\{a,b\}$.

כעת נוכיח את הטענה במרחב נורמי:

נוכיח הכלה דו כיוונית:

$cl(B(a,r))\subseteq B[a,r]$ - שימו לב שהכלה זו נכונה בכל מרחב מטרי, לאו דווקא מרחב נורמי. מתקיים $B(a,r)\subseteq B[a,r]$, הוכחתם ש-$B[a,r]$ היא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי ולכן $cl(B(a,r))\subseteq B[a,r]$.

$cl(B(a,r))\supseteq B[a,r]$- שימו לב שהכלה זו אינה נכונה בכל מרחב מטרי (ראו דוגמה נגדית) אך כן נכונה בכל מרחב נורמי. יהי $x\in B[a,r]$ ונראה שיש סדרה ב- $B(a,r)$ שמתכנסת אליו.

<u>מוטיבציה לבחירת הסדרה</u>: $x\in B[a,r]$ ולכן $\|x-a\|\le r$ ואז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\|=\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-a\|<r$. ז"א, אנחנו מחפשים סדרה $\{y_n\}$ כך ש-$y_n-a=\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)$ ואז יהי מובטח ש-$y_n\in B(a,r)$. מהעברת אגפים נקבל את הסדרה:

$\{y_n\}=\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{a}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(a,r)$. מתקיים $y_n\to x$ שכן:

$$\|y_n-x\|=\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\|=\left(\frac{1}{n}\right)\|x-a\|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\left(\left(\frac{1}{n}\right)\to 0,\|x-a\|\le r\right)$$

<u>שאלה 7</u>

תהיינה τ_1,τ_2 טופולוגיות על X כך ש-$\tau_1 \subseteq \tau_2$. הוכיחו:

א. F סגורה ב-(X,τ_1) $\Leftarrow$ F סגורה ב- (X,τ_2).

נסמן ב- $\operatorname{int}_{\tau_i}(A)$ את הפנים של A במרחב (X,τ_i) (כנ"ל עבור $cl_{\tau_i}(A)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{\tau_1}(A) \subseteq \operatorname{int}_{\tau_2}(A)$, $cl_{\tau_1}(A) \supseteq cl_{\tau_2}(A)$.

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $(\mathbb{R},T)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

$(0,1],(0,1),[0,1],[0,1)$.

__פתרון__

א. F סגורה ב-(X,τ_1) ולכן $F^C \in \tau_1$ ולכן $F^C \in \tau_2$ ולכן F סגורה ב-(X,τ_2).

ב. $\operatorname{int}_{T_1}(A) \subseteq \operatorname{int}_{T_2}(A)$: $\operatorname{int}_{\tau_1}(A) = \bigcup_{\tau_1 \ni O \subseteq A} O \underset{\tau_1 \subseteq \tau_2}{\subseteq} \bigcup_{\tau_2 \ni O \subseteq A} O$

$cl_{\tau_1}(A) \supseteq cl_{\tau_2}(A)$:

$cl_{\tau_2}(A) = \bigcap_{\substack{A\subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in(X,\tau_2)}} F$ וגם $cl_{\tau_1}(A) = \bigcap_{\substack{A\subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in(X,\tau_1)}} F$. כעת נשים לב שלפי א', אם $A \subseteq F$ וכן סגורה לפי τ_1 אזי $A \subseteq F$ סגורה לפי τ_2. לכן

$cl_{\tau_2}(A) = \bigcap_{\substack{A\subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in(X,\tau_2)}} F \supseteq cl_{\tau_1}(A) = \bigcap_{\substack{A\subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in(X,\tau_1)}} F$.

ג. שימו לב שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה, ולכן כל קבוצה פתוחה לפי הרגילה, פתוחה לפי סורגנפריי; וכנ"ל לגבי קבוצה סגורה (לפי סעיף א').

$(0,1)$ פתוחה לפי סורגנפריי ומתקיים $\operatorname{int}((0,1)) = (0,1)$. מה לגבי הסגור?

הקבוצה $(0,1)$ אינה סגורה, מכיוון שיש בה סדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 2}$ המתכנסת ל-0.

לכן $0 \in cl((0,1)) \setminus (0,1)$. מצד שני, $[0,1]$ סגורה ולכן זו בהכרח הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את $(0,1)$ ומכאן $cl(0,1) = [0,1]$.

$[0,1]$: זו קבוצה סגורה בטופולוגיה הרגילה ולכן סגורה גם בסורגנפריי ולכן $cl[0,1] = [0,1]$. בנוסף, נשים לב כי זו קבוצה לא פתוחה: כי כל

סביבה של 1 מכילה סביבה מהצורה $[1,\varepsilon)$ עבור $\varepsilon>1$ כלשהו ולכן לא מוכלת בקבוצה. נמצא את הפנים: הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-$[0,1]$ ולכן $\operatorname{int}[0,1]=[0,1)$.

$[0,1)$: סגוחה (בדקו!) ולכן $\operatorname{int}([0,1))=cl([0,1))=[0,1)$.

$(0,1]$: ניתן לראות (משני נימוקים קודמים) שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה. הפתוחה המקסימלית שמוכלת בתוכה היא $(0,1)$ והסגורה המינימלית שמכילה אותה היא $[0,1]$ ולכן:

$\operatorname{int}((0,1])=(0,1),\quad cl((0,1])=[0,1]$.