

שיעור 5

האינטגרל הלא מסויים

הגדרה

פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ בתחום D , אם עבור כל x בתחום D מתקיים $F'(x) = f(x)$.

הערה

אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז גם $F(x) + c$, כאשר c מספר קבוע, היא פונקציה קדומה של $f(x)$ מכיוון ש $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. קיבלנו שלפונקציה $f(x)$ יש אינסוף פונקציות קדומות.

דוגמא

הפונקציה $F(x) = x^2$ היא פונקציה קדומה של $f(x) = 2x$ מכיוון ש $F'(x) = f(x)$.
הפונקציה $F(x) = x^2 + 1$ היא פונקציה קדומה של $f(x) = 2x$ מכיוון ש $F'(x) = f(x)$.
באופן כללי הפונקציה $F(x) = x^2 + c$ היא פונקציה קדומה של $f(x) = 2x$ מכיוון ש $F'(x) = f(x)$.

הגדרה

תהי $f(x)$ בעלת פונקציה קדומה $F(x)$. אוסף כל הפונקציות הקדומות $F(x) + C$ של $f(x)$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$, אותו נסמן $\int f(x)dx = F(x) + c$.

תכונות האינטגרל הלא מסוים

- אם $f(x)$ גזירה אזי $\int f'(x)dx = f(x) + c$.
- לכל קבוע a מתקיים $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$.
- האינטגרל של הסכום (או ההפרש) של שתי פונקציות שווה לסכום (או הפרש) האינטגרלים $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

אינטגרלים מיידיים

$$1. \text{ כאשר } n \neq -1 \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

$$\text{דוגמא: } \int (3x + 2)^3 dx = \frac{(3x + 2)^4}{3 \cdot 4} = \frac{(3x + 2)^4}{12}$$

$$2. \int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{\ln|ax + b|}{a} + c$$

$$\text{דוגמא: } \int \frac{1}{5x + 2} dx = \frac{\ln|5x + 2|}{5} + c$$

$$3. \text{ כאשר } a > 0, a \neq 1 \int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$$

$$\text{דוגמא: } \int 2^{4x+1} dx = \frac{2^{4x+1}}{4 \ln 2} + c$$

$$4. \int \cos(ax + b) dx = \frac{\sin(ax + b)}{a} + c, \int \sin(ax + b) dx = \frac{-\cos(ax + b)}{a} + c$$

דוגמא: $\int \sin(3x + \pi) dx = \frac{-\cos(3x + \pi)}{3} + c$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{\operatorname{ctg}(ax+b)}{a} + c$, $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{\operatorname{tg}(ax+b)}{a} + c$

6. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + c$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

חישוב אינטגרלים בעזרת האינטגרלים המיידים

תרגיל

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sin^2 x dx$ ב. $\int \left(1 + \sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx$ ג. $\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^3} dx$ ד. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

פתרון

א. נשתמש בזהות $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$

ב.

$\int \left(1 + \sqrt[4]{x^5}\right)^2 dx = \int \left(1 + x^{\frac{5}{4}}\right)^2 dx = \int \left(1 + 2x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{10}{4}}\right) dx = x + \frac{2x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + \frac{x^{\frac{14}{4}}}{\frac{14}{4}} + c = x + \frac{8x^{\frac{9}{4}}}{9} + \frac{2x^{\frac{14}{4}}}{7} + c$

ג.

$\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^3} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} + x^{-3}\right) dx = 2x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2}$

ד.

$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

חישוב אינטגרלים בשיטת ההצבה

משפט

תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בקטע מסוים I , ותהי $\phi(t)$ פונקציה גזירה בקטע

מסוים J , כך שלכל $t \in J$ מתקיים $\phi(t) \in I$. אזי $\int f(\phi(t))\phi'(t) dt = F(\phi(t)) + c$

דוגמא

נבחר בהצבה $x = \phi(t) = \sqrt{t}$ אזי $dt = 2x dx$ ו $t = x^2$

$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| = \ln(1+x^2)$

תרגיל

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \tan x dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \quad \text{ג.}$$

פתרון

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \text{א.} \quad \text{נציב } t = \cos x \text{ ואז } dt = -\sin x dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad \text{ב.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{עבור המחובר השני ניתן להשתמש בנוסחה ולקבל}$$

$$2 \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = 2 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad \text{נשאר לחשב את האינטגרל של המחובר הראשון}$$

עבור המחובר הראשון נשתמש בשיטת ההצבה:

$$\text{נציב } t = x^2 \text{ ואז } dt = 2x dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{9-t}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right)$$

סה"כ נקבל

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} dx = 2 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2}{3}\right)$$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{e^x + 1/e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad \text{ג.}$$

$$\text{נציב } t = e^x \text{ ואז } dt = e^x dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t = \arctan e^x$$

חישוב אינטגרלים הכוללים פונקציות שורש

תרגיל

פתור את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx \quad \text{ד.} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx \quad \text{ג.}$$

פתרון

א.

$$\text{נציב } x = t^2 \text{ ואז } dx = 2t dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt =$$

$$2 \left(\int 1 dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt \right) = 2t - 2 \arctan t = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + c$$

ב.

נציב $t = 1 + \sqrt{x+2}$ ואז

$$dx = 2(t-1)dt \Leftrightarrow x = (t-1)^2 - 2 \Leftrightarrow x+2 = (t-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = t-1$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{2t-2}{t} dt = \int 2dt - \int \frac{2}{t} dt = 2t - 2\ln|t| = 2 + 2\sqrt{x+2} - 2\ln(1+\sqrt{x+2}) + c$$

ג.

נציב $x = t^4$ ואז $dx = 4t^3 dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{t^4 \cdot 4t^3}{t^2 + t} dt = \int \frac{4t^6}{t+1} dt$$

$$\frac{t^6}{t+1} = t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \dots$$

אינטגרציה לפי חלקים

נניח ש u, v הן פונקציות של x על פי כלל הגזירה של מכפלת פונקציות נקבל ש $(uv)' = u'v + uv'$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

מכאן נקבל את הנוסחה הבאה: $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$

תרגיל

חשב בעזרת אינטגרציה בחלקים את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \arctan x dx \quad \text{ב. } \int \ln x dx \quad \text{ג. } \int e^x \cos x dx \quad \text{ד. } \int x^2 \cos \frac{x}{2} dx$$

פתרון

א.

$$\text{נסמן } \begin{matrix} u = \arctan x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x & v' = 1 \end{matrix} \text{ ואז}$$

נשתמש בנוסחה $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ ונקבל

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

נבחר בהצבה $t = x^2$ ואז $dt = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} \ln|1+t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

ב.

$$\text{נסמן } \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = x & v' = 1 \end{matrix} \text{ ואז}$$

נשתמש בנוסחה $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ ונקבל

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c$$

ג.

$$\begin{array}{l} u' = e^x \quad \text{וא} \quad u = e^x \\ v = \sin x \quad \text{וא} \quad v' = \cos x \end{array} \quad \text{נסמן}$$

נשתמש בנוסחה $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ ונקבל

$$(1) \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int e^x \sin x dx$.

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

$$\begin{array}{l} u' = e^x \quad \text{וא} \quad u = e^x \\ v = -\cos x \quad \text{וא} \quad v' = \sin x \end{array} \quad \text{נסמן}$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x \Leftrightarrow \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x$$

ד.

$$u' = 2x \quad u = x^2$$

$$\begin{array}{l} v = 2 \sin \frac{x}{2} \quad \text{וא} \quad v' = \cos \frac{x}{2} \end{array} \quad \text{נסמן}$$

נשתמש בנוסחה $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ ונקבל

$$(1) \int x^2 \cos \frac{x}{2} dx = 2x^2 \sin \frac{x}{2} - \int 4x \sin \frac{x}{2} dx$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int 4x \sin \frac{x}{2} dx$.

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים

$$u' = 4 \quad u = 4x$$

$$\begin{array}{l} v = -2 \cos \frac{x}{2} \quad \text{וא} \quad v' = \sin \frac{x}{2} \end{array} \quad \text{נסמן}$$

$$\int 4x \sin \frac{x}{2} dx = -8x \cos \frac{x}{2} + \int 8 \cos \frac{x}{2} dx = -8x \cos \frac{x}{2} + 16 \sin \frac{x}{2}$$

נציב ב (1) ונקבל

$$(1) \int x^2 \cos \frac{x}{2} dx = 2x^2 \sin \frac{x}{2} + 8x \cos \frac{x}{2} - 16 \sin \frac{x}{2}$$

פתרון אינטגרלים באמצעות נוסחת נסיגה

נרצה לחשב את סדרת האינטגרלים $I_n = \int f_n(x) dx$.

שיטת האינטגרציה לפי חלקים מאפשרת למצוא אינטגרל באמצעות נוסחת נסיגה.

נחשב את I_1 ולאחר מכן נחשב את I_{n+1} באמצעות I_n .

$$\begin{cases} I_1 = \int f_1(x) dx \\ I_{n+1} = \phi(I_n) \end{cases} \quad \text{נרשום את הפתרון}$$

תרגיל

$$. I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} \quad \text{חשב את האינטגרל}$$

פתרון

$$. I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x \quad \text{עבור } n = 1 \text{ נקבל}$$

$$. \int uv' dx = uv - \int u'v dx \quad \text{עבור } n > 1 \text{ נשתמש בנוסחה}$$

$$u' = \frac{-2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}} \quad \text{ואז} \quad u = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$$

$$v = x \quad v' = 1$$

נקבל

$$(1) I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx$$

$$. \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \quad \text{נשאר לחשב את האינטגרל}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = I_n - I_{n+1}$$

$$. I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \Leftrightarrow I_n = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) \quad \text{נציב ב (1) ונקבל}$$

פתרון אינטגרלים של פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ נקראת פשוטה אם מעלת הפולינום $P(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$.

בעזרת חילוק פולינומים ניתן להגיע לפונקציה רציונלית פשוטה.

דוגמא

$$. \frac{x^3}{x+2} = (x^2 - 2x + 4) - \frac{8}{x+2}$$

$$. \frac{ax+b}{x^2+px+q} \quad \text{נלמד בשיעור לפתור אינטגרלים מהצורה}$$

שלב א

נשים לב ש $Q'(x) = 2x + p$ ואז ניתן לרשום את השבר באופן הבא

$$: \frac{a}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + t \int \frac{1}{x^2+px+q} dx \quad \text{נסמן } t = b - \frac{pa}{2} \text{ ונשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא:}$$

$$. \frac{a}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + t \int \frac{1}{x^2+px+q} dx$$

את האינטגרל של המחובר הראשון אנחנו יודעים לפתור בעזרת שיטת ההצבה.

נשאר ללמוד לפתור את האינטגרל $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$.

דוגמא

נפתור את האינטגרל $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+1} dx$

נשים לב ש $Q'(x) = 2x+2$.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+2x+1} dx$$

המחובר הראשון ניתן לפתור בעזרת שיטת ההצבה ולקבל $\frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+1)$.

המחובר השני נפתור באופן הבא: $2 \int \frac{1}{x^2+2x+1} dx = 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{-2}{x+1}$

סה"כ נקבל $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+1) - \frac{2}{x+1}$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$$

מקרה 1

$$p^2 - 4q = 0$$

במקרה כזה ניתן לרשום $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{(x+n)^2} dx = -\frac{1}{x+n}$

דוגמא

נשים לב ש $6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx$

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3} + c$$

מקרה 2

$$p^2 - 4q < 0$$

ניתן לרשום את $x^2 + px + q$ באופן הבא

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{(x+b)^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x+b}{a}$

דוגמא

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 4 + 4} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 2^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2}$$

מקרה 3

ואז למשוואה $x^2 + px + q = 0$ יש שני פתרונות $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$ ואז $p^2 - 4q > 0$

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx = \frac{1}{\alpha - \beta} \int \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right) dx$$

שאנחנו יודעים לפתור.

דוגמא

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+3)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+3} dx =$$
$$\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x+3|$$