

**חוברת עבור הקורס
מתמטיקה תיכונית מנקודת מבט מתקדמת**

**המחלקה למתמטיקה
אוניברסיטת בר אילן**

מספרים ממשיים, מספרים רציונליים-שברים, שברים חלקיים,

בניית נוסחאות ושימוש בהן.

(1) פתור המשוואה הבאה:

$$1993 = 1 + \frac{8}{1 + \frac{8}{1 - \frac{8}{1 + \frac{4}{1 - \frac{4}{1 - \frac{8}{1 - \frac{8}{x}}}}}}}$$

(2) קצת שברים - חשבו:

$$\cdot \frac{4}{\frac{15}{2}}, \frac{7}{\frac{8}{21}}, \frac{7}{\frac{8}{21}}, \frac{6}{\frac{3}{4}}, \frac{7}{\frac{8}{14}}, \frac{6}{\frac{3}{4}}$$

(3) ועוד פעם חשב:

$$\begin{aligned} & \frac{26}{13} \div \frac{21}{3} \\ 1) & \frac{27}{9} \div \frac{80}{14} \\ & \frac{8}{7} \\ 2) & \frac{15}{7} \div \frac{38}{21} \\ & 19 \\ & \frac{25}{49} \div \frac{100}{14} \\ 3) & \frac{39}{11} \div \frac{33}{13} \\ & \frac{4}{7} \div \frac{14}{4} \\ 4) & \frac{9}{7} \div \frac{5}{4} \\ & \frac{18}{15} \end{aligned}$$

(4 חלק :

$$3.5 \div 0.07,$$

$$0.121 \div 2.2$$

$$1.44 \div 0.012$$

$$0.3 \div 0.5$$

$$0.35 \div 0.8$$

$$0.25 \div 0.004$$

(5 מצא את כול הערכים הטבעיים של

X,Y,Z

אשר מקיימים את המשוואה:

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$$

(6 פתור את המשוואה:

$$1994 = 2 + \frac{3}{1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{1 + \frac{3}{1 - \frac{3}{1 - \frac{9}{1 - \frac{9}{x}}}}}}}$$

(7 נתון:

$$P(x) = 16x^2 - 24x + 9$$

$$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 6$$

חשב ערך של כאשר $x = 0.75$ $\frac{P^3 + Q^3}{P^2 - PQ + Q^2} + \frac{P^3 - Q^3}{P^2 + PQ + Q^2}$

(8 פשט :

$$1) \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}}$$

$$2) \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}$$

$$3) \frac{\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x}{1-x+x^2}}$$

$$4) \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \cdot \frac{\frac{a^3}{b^3} - 1}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1} \div \frac{\frac{a^3}{b^3} + 1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1}$$

9 פשט :

$$1) \frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}$$

$$2) \frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1 - 3 \frac{1+x}{1-3x}} \div \frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1 - 3 \frac{1+x}{1-3x}}$$

$$3) 6 \div \frac{1}{3} - 0.8 \div \frac{1.5}{\frac{3}{2} \cdot 0.4 \cdot \frac{50}{1 \div \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0.25}}{6 - \frac{46}{1 + 2.2 \cdot 10}}$$

10) הוכח: סכום חזקות שלישיות של שלושה מספרים עוקבים מתחלק ב-9.

11) פשט :

דף 1-ב

פשטו את הביטויים:

$$\frac{1}{x - \frac{3}{y + \frac{1}{z}}} \cdot \frac{3}{z + \frac{1}{y}} - \frac{3y}{xyz + x - 3z}$$

$$\frac{2}{x + \frac{1}{y - \frac{2}{z}}} \cdot \frac{3}{z - \frac{2}{y}} - \frac{6y}{xyz - 2x + z}$$

דף מספר 2

1) כיצד לסמן על ציר המספרים

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{9}.$$

2) הכנס מספרים הבאים לקבוצות, שהם שייכים להן.

$$-1, 3, \sqrt{16}, \sqrt{\frac{1}{9}}, \sqrt{7}, 0.3(42), \frac{1}{\sqrt{25}}, 0, 2.7182818284590\dots, \varphi, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{4}, \pi, \sec 60^\circ, \sqrt{-4}, \sqrt[3]{27}$$

3) חלק פולינום בפולינום

$$1) (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) \div (x - 1)$$

$$2) (x^4 - x^2 + 5) \div (x - 3)$$

$$3) (2x^4 + 8x^3 - 7x - 9) \div (x + 4)$$

$$4) (z^3 + z^2 + z - 1) \div (z + 1)$$

$$5) (t^3 - 6t^2 + 12t - 8) \div (t - 2)$$

4) פתור משוואות הבאות, מצא פתרונות ממשיים:

$$1) 2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$2) x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$4) 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 29x + 15 = 0$$

$$5) 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$$

חשב (5)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

פשט (6)

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{x+n}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(x+2)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(x+n)^2}\right)$$

דף 2 - נוסף

(1) ספר בני גורן - ב-1 ע' 234

הוכח בדרך אנדוקציה (או אחרת)

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{n+1} * \frac{n+1}{n+2} * \frac{n+2}{n+3} * \dots * \frac{2n-1}{2n} * \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n}$$

$$n + (n+1) + (n+2) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

$$(2n+2) + (2n+4) + (2n+6) + \dots + 6n = 2n(4n+1)$$

2) עי 235- כתוב קשים במיוחד

$$\left(1 - \frac{2}{n+2}\right) \left(1 - \frac{2}{n+4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{3n+2}\right) = \frac{n}{3n+2}$$

$$\frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+4)} + \dots + \frac{1}{(3n+2)3n} = \frac{1}{3n}$$

משפט

$$a_0 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$x = \frac{p}{q}$$

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \dots (1)$$

$$(1) \cdot q^{n-1}$$

$$a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_0 q^{n-1} = -\frac{a_n p^n}{q}$$

$$(1) \cdot \frac{q^n}{p}$$

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1} = -\frac{a_0 q^n}{p}$$

3-71

1) הוכח שממוצע חשבוני של שני מספרים חיוביים לא קטן ממוצע הנדסי שלהם.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad \text{אם } a > 0, b > 0, c > 0$$

(3) הוכח שאם $x + y + z = 1$ ו- $x > 0, y > 0, z > 0$ אז $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$

(4) הוכח שלכול מספר ממשי מתקיים $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$

(5) הוכח כי סכום שני מספרים חיוביים לא קטן מ-2, אם מכפלתם שווה ל-1.

(6) הוכח שאם $ab \leq 0$

אז

$$(a^2 - b^2)^2 \leq (a - b)^4$$

(7) הוכח

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n}$$

(8) הוכח $1 \leq \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5} \leq 3$

(9) הוכח שלכול מספר טבעי הגדול מ-1 מתקיים $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$

דף מספר - 4

(1) עבור אילו ערכים שלמים של k פתרונות של מערכת משוואות מקיימת את התנאים $y < 0, x > 0$?

$$kx - 2y = 3$$

$$3x + ky = 4$$

(2) פתור האי שיוונים הבאים

$$1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 2$$

$$x^2 - |x| < 0$$

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$$

$$3 - 2 \leq \frac{3tg^2 \frac{\alpha}{2} + 10tg \frac{\alpha}{2} + 3}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 8$$

אם $\alpha \neq (2k+1)\pi, \dots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$7x + 2 \geq 4x$$

$$\frac{x}{2} - \frac{2-5x}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$24 + 2x - x^2 > 0$$

$$2x + 1 \leq -1 - 2x$$

$$3(x-5)(5x+4) < 2(x-5)(3x+1)$$

4) פתור מערכות אי שווים ו אי שוויון.

$$5x > x^2$$

$$25x^2 \leq 16$$

$$x(x-1)^2 \geq 12(x-1)$$

$$ax = 1$$

$$ax = a$$

$$ax + a = 4a$$

$$ax = 23.5 - 4.8 - 18.7$$

$$|x| + 3x^2 + 4 = 0$$

$$a - x = \frac{3}{a}x + \frac{4}{a}$$

$$x - 1 = k(2 - kx)$$

$$\frac{9x}{a} = a^2x + 3a$$

$$\frac{m(2m + 5x) - 2}{5x} = m^2$$

$$\frac{2x}{x^2 - ax - 6a^2} = \frac{3a}{x + 2a}$$

$$\frac{3}{ax} + \frac{a}{x + 2} = 0$$

$$a = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

$$\sqrt{2x + 1} + 3 = 0$$

$$\sqrt{4x^2 - 20x + 15} = 3x - 5$$

$$\sqrt{8 - x} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x - 3}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 4x + 4} - \frac{5x + 5}{x + 2} + 3 = 0$$

$$\frac{1}{x - 7} - \frac{1}{x - 8} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 5}$$

$$\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{1}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{3}{4}$$

$$x(x - 6)(x - 3)^2 = 400$$

$$\frac{1}{x(x + 2)} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{72}$$

$$4x^2 + 8x + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x} = 37$$

(1) פשט ביטויים הבאים

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x} \right), , 0 < x < 1$$

$$\frac{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}, \dots, z = a \left(\frac{m^2+n^2}{2mn} \right)^{\frac{1}{2}}, \dots, a > 0, \dots, n > m > 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}} - b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \dots, x = \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2m}}$$

(2) חשב בלי מחשבון או פשט :

$$(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) \div 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2-b}$$

$$\left(a\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{ab} + b\sqrt{\frac{b}{a}} \right) \sqrt{ab}$$

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}} \cdot \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}$$

$$\left(\sqrt[n+3]{n-1} \sqrt[n+1]{a^{2n+1}} \sqrt[n-1]{a} \right)^{n^2-1}$$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-2} + 1}$$

$$\left(\frac{x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{\frac{2}{3}}} - 2\sqrt[3]{xy} \right)^6$$

$$\left[(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-1} + 3\sqrt[3]{xy} \right]^{\frac{1}{2}}, \dots, (x > 0, y > 0)$$

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות מורכבות

צייר גרפים של פונקציות הבאות :

$$y = 2^x$$

$$y = 2^{|x|}$$

$$y = 2^{\frac{1}{x}}$$

$$y = 2^{-x}$$

$$y = 2^{\sin x}$$

$$y = 2^x + 2^{-x}$$

$$y = 2^{2\sqrt{x}}$$

$$y = 2^{x^2}$$

$$y = 2^{\log_3 x}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

$$y = -\log_{\frac{1}{2}} x$$

$$y = a^{\log_a x}$$

$$y = \log_3 |x|$$

$$y = |\log_2 x|$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

$$y = \frac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$$

מצא במישור נקודות המקימות את התנאים הבאים :

(1)

$$y > \log_2 x$$

$$y < 2$$

$$y > \log_2 x \quad (2)$$

$$y < 4^x$$

משוואות ואי שוויונים מעריכיים

(1) פתור משוואות הבאות :

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$$

$$\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}} = 5^{\sqrt{x}-4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \sqrt[4]{1.5}$$

$$4 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{x} = 9 \cdot \frac{1}{x}$$

$$0.125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$$

$$\left[2\left(2^{\sqrt{x+3}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$$

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0.25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$$

$$15^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}$$

$$\left(\frac{57}{37}\right)^{1+x} + \left(\frac{57}{37}\right)^{1-x} = 10$$

(2) פתור אי שוויונים הבאים :

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{625}\right)^{6x-3}$$

$$\frac{81}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x+4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2-4x}$$

$$(\sqrt{2})^{3x-2} < 4 \cdot 8^x$$

$$4^{\frac{x+3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-2} < \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{6-x}{3-x}} \geq 49$$

$$5^{\frac{x^2-3x}{2x-4}} \leq 5$$

$$(\sqrt{3})^{x+2} - (\sqrt{3})^{4-x} \leq (\sqrt{3})^x + 3$$

3) מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{81} - 3^{x^2-5x}}}$$

$$y = \sqrt[4]{16^{x-2} - 3 \cdot 4^{x-1} + 32}$$

4) נתונות הפונקציות :

$$F(x) = x^2 - 3x$$

$$G(x) = 2^{F(x)} - 16$$

מצא לאילו ערכי x הפונקציה F(x) היא חיובית והפונקציה G(x) היא שלילית.

5) מצא לאילו ערכי x גרף הפונקציה

נמצא בין הישרים $y=0.25$ ו- $y=1$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}$$

6) נתונה פונקציה $f(x) = 2^x$ מצא לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון

$$2 \frac{1}{2} f(4x) - f(8x-1) > f(1)$$

7) מצא לאילו ערכי x הפונקציה הבאה אי שלילת :

$$g(x) = 3^{\frac{x+3}{2-x}} - \sqrt{3}$$

לוגריתמים

1) חשב :

$$\log_{16} \log_3 81$$

$$\log_4 \frac{1}{64} + \log_5 \frac{1}{25} + \log_3 \frac{1}{9}$$

$$\log_{2004} \operatorname{tg} 45^\circ + \log_{\frac{1}{2}} \cos 45^\circ$$

$$\log_{3\sqrt{3}} (9\sqrt{3})$$

$$\log_{\sin \frac{2\pi}{5}} \left(2 \cos \frac{\pi}{5} \right) + \log_{\sin \frac{2\pi}{5}} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3^{\log_2 16}}{7^{\log_4 9}} 16$$

$$\sqrt{\log_{16} 4 + \log_{16} 24 - \log_{16} 6}$$

(2) פתור משוואות הבאות :

$$\log_{\sqrt{x}}(2x - 6\sqrt{x} + 8) = 2$$

$$\log_{\frac{2}{x}}(x^2 + 3) = 2$$

(3) חשב את x :

$$\log_3 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3 12 - \log_3 18$$

$$\log_5 x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \log_5 10 - \log_5 \sqrt[3]{4}$$

$$x = \frac{2}{9} \log_6 8 + \frac{1}{3} \log_6 12 - \log_6 2$$

$$x = \frac{\log_2 10 + \log_2 5 - 1}{3 \log_2 10 - 3}$$

(4) פתור משוואה הבאה :

$$4 \cdot 25^{x+1} - 6 \cdot 10^{x+1} + 4^{x+1.5} = 0$$

5 (נתונה הפונקציה $f(n) = a^n$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(א) **הבע בעזרת a** את הפתרון של המשוואה

$$\frac{1}{4} f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 15$$

(ב) **מצא את a** אם נתון שפתרון המשוואה הנ"ל הוא $\log 1000$.

(6) חשב :

$$5^{\log_{25} 49}$$

$$(\sqrt{10})^{2-2\log 5}$$

$$(\sqrt{5})^{1+\log_{\sqrt{5}} \sqrt{20}}$$

$$\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3} \cdot \log \sqrt{7} \cdot \log_9 100$$

$$\log_4 0.2 \cdot \log_{125} 0.125$$

(7) פתור משוואות הבאות :

$$\log_3^2 x (\log_3^2 x - 3) = 2 \log_3^2 x - 4$$

$$\frac{\log\left(\frac{x}{3}\right)}{\log(x-2)} - 2 = 0$$

$$\frac{\log_2[x^2 + 4]}{\log_2(x+3)} - 1 = \frac{3}{\log_2(x+3)}$$

$$\log_9(27x) + \log_x 81 = 6$$

$$x^{\log x} = 1000x^2$$

$$(x^2)^{\log_4 x} = 64x$$

8) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_2(x^2 - x - 3)$

פתור משוואה: $f^2 + 1 = 1$

9) מצא האם

פונקציות באות

זוגיות או אי זוגיות

$$y = \log_3 \frac{4-x}{4+x}$$

$$y = 2 \log(3^x + 1) - \log(3^{2x} + 1)$$

10) פתור אי שוויונים הבאים:

$$\log_{0.2}(2x - 3) \geq -1$$

$$\log_9 x^2 < 1$$

$$\log_3(2x + 8) > 2 \log_3 x$$

$$\log_9 \frac{x}{2x-1} > -\frac{1}{2}$$

$$\log_4 8x + \log_x 64 < 5$$

11) מצא תחום ההגדרה של פונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 5x + 3)}$$

$$y = \log_5 \frac{3x-1}{x-2}$$

$$y = \sqrt{\log_3(7x - x^2 - 11)}$$

$$y = \sqrt{\log_3^2(x-2) - 1}$$

(12) נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \frac{\log\left(\frac{x}{4}\right)}{\log(x-3)} - 2$$

(א) האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x ?

(ב) מצא תחום ההגדרה של הפונקציה.

בעיות גידול ודעיכה

(1) במעבדת מחקר נמצאים שני סוגים של חומר רדיואקטיבי. זמן מחצית החיים של חומר ב' מהווה $2/3$ מזמן מחצית החיים של חומר א'. מ-6 ק"ג של חומר א', נותרו במעבדה כעבור שלוש שנים, 4374 גרם.

(א) מהו זמן מחצית החיים של חומר א' ?

(ב) איזו כמות מחומר ב' יש לאחסן במעבדה על מנת שיישארו ממנו 4374 גרם כעבור שלוש שנים ?

(2) נגדיר: "זמן רבע החיים" של חומר רדיואקטיבי הוא הזמן שבסופו נשאר רבע מכמותו. ההתחלתית.

נתון: זמן רבע החיים של חומר א' שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב'. מ-1200 גרם של חומר א' נשאר כעבור 4 שנים 800 גרם. איזו כמות של חומר ב' תישאר מ-1200 גרם כעבור 4 שנים.

(3) כמות מסוימת של חיידיקים הוכנסה למבחנה. כעבור 8 שעות, גדלה כמות החיידיקים במבחנה פי k .

1. בהנחה שהחיידיקים מתרבים בצורה מעריכית, בטא בעזרת k פי כמה תגדל כמות החיידיקים יממה לאחר הכנסתם למבחנה ?

2. מתברר, שכעבור יממה מרגע הכנסת החיידיקים במבחנה, גדל מספר החיידיקים ב-90%.

א. מצא את k .

ב. מצא בכמה אחוזים עלה מספר החיידיקים בשעתיים הראשונות ?

ג. כעבור כמה שעות יגדל מספר החיידיקים פי שלושה ?

4) כמות מסוימת של חומר רדיואקטיבי הובא למעבדת מחקר כלשהי. כמות החומר פוחתת בצורה מעריכית. כעבור שש שנים נשקל החומר שוב, ואז התברר שהכמות פחתה ב- 46.856%.

א. מהו זמן מחצית החיים של החומר הרדיואקטיבי?

ב. החומר הרדיואקטיבי נשקל כעבור t שנים וכעבור $2t$ שנים מיום הגעתו למעבדה. התברר שכמות החומר שהתפרק בין שתי השקילות הנ"ל מהווה 24.19% מן הכמות שהובאה למעבדה. מצא את t אם ידוע כי $t < 7$.

ג. באותה מעבדה מאוכסנת כמות מסוימת של חומר רדיואקטיבי נוסף, שזמן מחצית חייו קצר פי 2 מזמן מחצית החיים של חומר הראשון. בכמה אחוזים פוחתת כמות החומר הרדיואקטיבי הנוסף לאחר תקופה של שש שנים?

5) מספר התושבים ביישוב מסוים גדל בצורה מעריכית. בשנה 1990 נרשם מספר תושבי היישוב וכעבור 7 שנים הגיע מספרם ל- 1824 תושבים. מקץ 6 שנים נוספות הגיע מספר תושבי היישוב ל- 2315.

א. כמה תושבים היו ביישוב בשנת 1990?

ב. בהנחה שלא יחול שינוי בקצב הריבוי, באיזו שנה יעלה מספר התושבים לראשונה על 3000?

ג. מצא תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$y = \sqrt{\log^2 x - 2 \log x}$$

בעיות מילוליות

1) מטוס קל טס ממקום A נגד כיוון הרוח למקום B הנמצא במרחק 2520 ק"מ ממקום A,

וחזר למקום A. לו גדלה מהירות הרוח פי 2 היה גדל זמן טיסתו הלוך וחזור פי . לו היה טס המטוס כאשר אין כלל רוח, הייתה נמשכת טיסתו הלוך וחזור 32

דקות $\frac{35}{32}$

פחות מן הזמן שנמשכה בפועל.

מצא מהירותו העצמית של המטוס ואת מהירות הרוח. (270 קמ"ש).

2) בשעה 7 יצא הולך רגל מנקודה B לעבר נקודה C. בשעה 8 יצאה מכונית מנקודה A ונסעה גם היא לעבר נקודה C. (B בין A ל-C). המרחק בין A ל-B הוא 105 ק"מ והמרחק בין B ל-C הוא 59.5 ק"מ. המכונית השיגה את הולך הרגל בשעה 9.5 והמשיכה לנסוע לעבר C. היא הגיעה לנקודה C, התעכבה שם חצי שעה והחלה לחזור לכיוון A. המכונית פגשה שוב את הולך הרגל במרחק 9 ק"מ מן המקום בו נפגשו בפעם הראשונה.

מצא מהירותו של הולך הרגל, אם נתון שהיא קטנה מ- 10 קמ"ש. (6 קמ"ש).

3) מטוס נוסעים טס ממקום A למקום B ובחזרה. בעת הטיסה נושבת רוח שכיוונה מ-B ל-A. זמן הטיסה בחזרה מ-B ל-A ארוך ב-m שעות מזמן הטיסה מ-A ל-B. טיסת המטוס הלוך וחזרה ארכה 30 שעות. הנקודה C נמצאת בין A ל-B במרחק 2400 ק"מ מ-B.

מטוס סילון שמהירותו גדולה פי 3 ממהירותו של מטוס הנוסעים עובר את המרחק ממקום C למקום B בשלוש שעות.

א) בטא באמצעות m את המהירות העצמית של מטוס הנוסעים (מהירות טיסתו בכוח מנוע בלבד) ואת מהירות הרוח.

$$V_1 = \frac{24000}{90+m} \dots\dots V_2 = \frac{800m}{90+m}$$

ב) עבור אילו ערכים של m תהיה המהירות הטיסה של המטוס בחזרה מ-B ל-A גדולה

מ-200 קמ"ש? ($0 < m < 6$)

4) גלעד יצא מנקודה A ורכב על אופניו במהירות קבועה v קמ"ש לעבר נקודה B. כעבור חצי שעה יצאה מירית מנקודה A ורכבה על אופניה במהירות הגבוהה ב-2 קמ"ש

מהמהירות בה רכב גלעד. מירית השיגה את גלעד לפני הגיעו לנקודה B והמשיכה מייד לעבר הנקודה B. מירית הגיעה לנקודה B חצי שעה לאחר שהיא השיגה את גלעד.

א) בטא באמצעות v את המרחק בין הנקודות A ו-B.

$$\left(\frac{1}{4}v^2 + v + 1 \right)$$

ב) מצא את ערכי v עבורם המרחק בין A ל-B קטן מ-36 ק"מ, אם ידוע שמירית רכבה במהירות של 11 קמ"ש לפחות. ($9 \geq v < 10$).

ג) גלעד התעכב 20 דקות בנקודה בה נפגש עם מירית ואחר-כך החל לחזור לנקודה A.

מירית הגיעה לנקודה B והחלה לחזור מייד לעבר הנקודה A. מירית רכבה כל הזמן במהירות 11 קמ"ש.

האם השיגה מירית את גלעד לפני הגיעו לנקודה A? נמק על ידי חישוב מתאים. (לא).

5) רוכב אופניים יצא מתל אביב ורכב דרומה. כעבור שעה יצא בעקבותיו רוכב אופניים נוסף. הרוכב האופניים הראשון נעצר לאחר שעבר מרחק של 16m ק"מ. שלוש שעות אחרי שנעצר הרוכב הראשון, נעצר גם הרוכב השני, במרחק 21m ק"מ מנקודת המוצא. הרוכב השני עבר בחמש שעות רכיבה 10 ק"מ יותר מן המרחק שעבר הרוכב הראשון בחמש שעות רכיבה.

א) בטא באמצעות m את מהירותו של הרוכב הראשון.

ב) הרוכב השני השיג את הרוכב הראשון במרחק 144 ק"מ מנקודת המוצא. מצא את m.

6) זן נדיר של ציפורים נודדות, המגיע מדי סתיו לארץ, נחקר על ידי מדענים ולצורך זה ספרו את מספר הציפורים בלהקה. הם מצאו שאוכלוסיית הציפורים בלהקה קטנה בצורה מעריכית. ארבע שנים לאחר תחילת המחקר, נמצא שמספר הציפורים בלהקה ירד לשליש ממספרן בספירה הראשונה.

א. פי כמה היה מספר הציפורים בלהקה גדול יותר לפני 10 שנים? (לעומת מספרן בספירה הראשונה.)

ב. בעקבות פעולת הצלה של המדענים, צפוי אחוז התמותה השנתי של הציפורים לרדת לחצי מאחוז התמותה עד כה. בעת נקיטת פעולות אלה היו בלהקה 240 ציפורים. במה ציפורים צפויות להיות בלהקה כעבור 5 שנים?

בעיות תנועה - המשך

1) רוכב אופנוע יצא מיישוב A לעבר יישוב B. כעבור שעה וחצי יצא רוכב אופנוע נוסף מן היישוב B לעבר יישוב A ורכב במהירות הגדולה ב- 10% ממהירותו של הרוכב הראשון. כאשר שני הרוכבים חלפו זה על פני זה, התברר, שהרוכב שיצא מ-A עבר מרחק הגדול ב- 99 ק"מ מן המרחק שעבר הרוכב שיצא מ-B. הרוכב הראשון, שיצא מיישוב A,

יכול לעבור את כל המרחק מ-A ל-B בזמן הארוך ב- 54 דקות מן הזמן הדרוש לרוכב השני לעבור מרחק זה.

א. באיזה מרחק מיישוב A נפגשו רוכבי האופניים.

ב. מצא את המהירויות שלכל אחד מן הרוכבים.

ג. לאחר הפגישה המשיך כל רוכב לנסוע ליעדו. הרוכב שיצא מ-A הגיע ל-B והחל מייד לחזור ל-A. הרוכב שיצא מ-B הגיע ל-A, התעכב שם 20 דקות והחל לחזור לכיוון B.

שני הרוכבים טרם נפגשו פעם נוספת אך המרחק ביניהם קטן מ-303 ק"מ. מצא את התחום בו נמצא פרק הזמן שחלף מן הרגע בו נפגשו הרוכבים.

(495 ק"מ, 90 קמ"ש, 99 קמ"ש)

2) שני רצים התחרו בריצה על מסלול שאורכו 1440 מטר. שניהם זינקו בו-זמנית. מהירותו של רץ א' הייתה גדולה ב-30 מטר לדקה ממהירותו של רץ ב'. לאחר 2 דקות של ריצה, התעייף רץ א' והקטין את מהירותו ב- 20% לעומת מהירותו הקודמת. הוא הגיע לקו הסיום 10 שניות לאחר הרץ השני.

א. מצא את מהירותם של שני הרצים בתחילת ריצתם, אם ידוע, שמהירותם גבוהה מ- 250 מטר לדקה.

ב. כעבור כמה דקות, מרגע הזינוק, השיג רץ ב' את רץ א'?

(300 מטר לדקה, 270 מטר לדקה, 4 דקות).

3) שני הולכי רגל יצאו בו-זמנית משני מקומות A ו-B והלכו זה לקראת זה. הם נפגשו ואז התברר שהולך רגל שיצא מ-A עבר 62.75% מן המרחק בין A ל-B.

שני הולכי הרגל המשיכו בדרכם. כעבור 54 דקות מרגע פגישתם, כשהגיע הולך הרגל שיצא מ-A לנקודה B, היה הולך הרגל השני במרחק 9.6 ק"מ מן הנקודה A. א. מה המרחק בין A ל-B ?

ב. בכמה זמן עובר כל אחד מהולכי הרגל את המרחק בין A ל-B ? (24 ק"מ, הולך רגל מ-A : 2.4 שעות, השני- 4 שעות).

4) שתי מכוניות יוצאות בו זמנית מאותו מקום ובאותו כיוון. מהירותה של המכונית הראשונה 60 קמ"ש ושל שנייה 75 קמ"ש. 20 דקות לאחר צאתן, יוצאת מאותו מקום מכונית ספורט המשיגה לאחר זמן מה את המכונית הראשונה וכעבור שעה נוספת היא משיגה את המכונית השניה. מהירותיהן של המכוניות נותרו קבועות במהלך הנסיעה. מהי מהירותה של מכונית הספורט ? (90 קמ"ש)

5) מיכל יצאה בשעה 9:00 בבוקר מביתה ורכבה על אופניה לכיוון בית חברתה יעל, הנמצא במרחק 35 ק"מ. בשעה 9:30 יצא אחיה של מיכל מאותו מקום ורכב אף הוא על אופניו באותה דרך ובאותו כיוון, במהירות הגדולה ב-2 קמ"ש ממהירותה של מיכל. האח השיג את מיכל לפני הגיעה לבית מברתה. חצי שעה לאחר הפגישה הגיעה מיכל לביתה של יעל.

א. מצא את מהירות רכיבתם של שני אחים.

ב. לאחר הפגישה חזר אחיה של מיכל מייד על עקבותיו. באיזו שעה הגיע לביתו ? (10 קמ"ש, 12 קמ"ש, 14:30).

בעות הספק

1) פועל א' ופועל ב' עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.

שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.

קצב העבודה הרגיל של פועל א' שווה לקצב העבודה הרגיל של פועל ב'.

אם כול אחד מהפועלים יגביר את קצב העבודה הרגיל שלו ב-50%, ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל א' לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל א' מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל ב' מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.

הפועלים ביצעו יחד עבודה זו בקצב הרגיל שלהם ב-6 ימים.

כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל א' בקצב הרגיל שלו?

2 בעיות גידול ודעיכה

- 1) משה הקפיד 16000 ש" בתכנית חסכון. הנושאת ריבית שנתית קבועה. כעבור 5 שנים היה ערך הכסף בחשבון 19002.98.
- א. בכמה אחוזים עלה ערך הכסף בתקופה זו. (18.77%)
- ב. מהי הריבית השנתית המשולמת בתכנית החיסכון? (3.5%).
- ג. כעבור כמה שנים יהיה ערך הכסף גדול פי 2 מן הסכום שהוקפד בהתחלה? (20)
- 2) ספל ובו קפה חם מאוד הונח על שולחן בחדר. טמפרטורת הקפה ירדה ב- 30% במשך 4 דקות. כעבור 4 דקות אלה, הועבר הספל לחדר קר יותר, שבו הירידה בטמפרטורה גדולה ב- 3% לדקה לעומת החדר הראשון.
- בהנחה שטמפרטורת הקפה יורדת בצורה מעריכית, כעבור כמה זמן, מרגע שהספל הונח בחדר הראשון, תרד טמפרטורת הקפה ב- 70% ? (10.916 דקות).
- 3) אסף עבד בחופש הגדול והרוויח 5000 ש"י. הוא הקפיד את שכרו בבנק בתכנית חיסכון המניבה ריבית שנתית קבועה. לאחר t שנים הגיע חשבונו ל- 5624.32 ש"י.
- א. הבע באמצעות t את אחוז הריבית שמשלם הבנק בתכנית החיסכון
- ב. כאשר היו בחשבונו של אסף 5624.32 ₪, הוא העביר את כספו לתוכנית חסכון אחרת. המניבה ריבית שנתית הגבוהה ב- 0.5% מן הריבית שהניבה התכנית הקודמת.
- לאחר חסכון של ארבע שנים בתכנית החדשה, היו בחשבונו 6707.1 ₪.
- לאחר כמה שנים, מן היום בו הקפיד את שכרו בבנק, יהיו בחשבונו של אסף 8000 ₪ ?

סדרות ובעיות מילוליות

(1) מספרים הבאים יוצרים סדרה חשבונית :

$$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$$

האם נכון, שמספרים

$$a^2, b^2, c^2$$

גם הם יוצרים סדרה חשבונית?

(2) נתונות שתי סדרות חשבוניות :

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \\ b_1, b_2, \dots, b_n.$$

$$\text{הראה שלכול } n \text{ טבעי מתקיים: } b_2 = \frac{a_6 + a_7}{2}, b_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}.$$

$$b_n = \frac{a_{4n-2} + a_{4n-1}}{2}$$

$$4(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_{4n}.$$

(3) הולך רגל יוצא כל בוקר להליכה לאורך מסלול שאורכו הכולל 24 ק"מ. הוא יוצא מביתו לכיוון מזרח והולך m ק"מ. אחר כך הוא פונה צפונה והולך 45 דקות. לאחר מכן הוא חוזר לביתו בדרך הקצרה ביותר. בדרכו חזרה הוא הולך 30 דקות פחות מהזמן שבו הוא הולך בשני הכיוונים ביחד, מזרחה וצפונה. בכל קטעי הדרך הוא הולך באותה מהירות קבועה.

חשב את m.

(4) נתונה סדרה הנדסית אין סופית שהמנה שלה היא

$$(0 < q < \frac{1}{2}), 4q^2.$$

בין כל שני איברים בסדרה הנתונה הכניסו איבר נוסף ונוצרה סדרה הנדסית חדשה שכל איבריה חיוביים.

(א) הבא באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.

מסכום הסדרה הנתונה. חשב את q. $48q^2$ ב) נתון שסכום הסדרה החדשה גדול פי

סדרות ובעיות מילוליות 2

(1) על שתי קבוצות פועלים הוטל לסלול כביש. במשך 40 הימים הראשונים עבדו הקבוצות בנפרד. תחילה עבדה הקבוצה הראשונה לבד וסללה $\frac{1}{3}$ של הכביש. לאחר מכן הפסיקה הקבוצה הראשונה את עבודתה והקבוצה השנייה עבדה לבד וסללה, עד לגמר היום ה-40, $\frac{1}{6}$ מהכביש. ביום ה-41 החלו שתי קבוצות הפועלים לעבוד ביחד וסיימו את סלילת הכביש תוך 18 ימים.

א. בכמה ימים הייתה יכולה כל קבוצה לבדה לסלול את הכביש?

ב. כמה ימים עבדה לבד כל קבוצה במשך 40 הימים הראשונים?

$$a_{n+1} = \frac{9n^2 - 21n + 10}{a_n} \quad (2) \text{ סדרה חשבונית מקיימת את כלל הנסיגה:}$$

א. מצא את האיבר הראשון של הסדרה.

ב. מצא את ההגדרה לפי מקום של הסדרה.

ג. מצא את ההגדרה של הסדרה בעזרת כלל נסיגה ע"י שתחשב את הסכום

$$a_{n+1} + a_n$$

ד. מצא, עבור האיבר הראשון השלילי

שמצאת בסעיף א', את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של הסדרה שמקומותיהם הם איברי הסדרה החשבונית

$$2, 7, 12, \dots$$

3) שלושה רוכבי אופניים א', ב', ו-ג' התחרו לאורך מסלול מסוים. מהירותו של רוכב א' הייתה גדולה ב-9 קמ"ש

ממהירותו של רוכב ב' וב- m קמ"ש ממהירותו של רוכב ג'. לכן רוכב א' הגיע m שעות לפני רוכב ב' ושעה לפני רוכב ג'.

א. הבע באמצעות m את מהירותו של רוכב א' ואת זמן רכיבתו.

ב. מצא לאילו ערכי m יש פתרון לבעיה.

4) סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל נסיגה:

$$a_1 = 0$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$$

א. הוכח שהסדרה עולה לכל n טבעי.

הוא מספר זוגי לכל n טבעי? נמק.

האם ביטוי ב. $\frac{2}{a_{n+1} - a_n}$

מתחלק ב-4 בלי שארית לכל n טבעי גדול מ-1? האם ביטוי $\frac{2}{a_{n+1} - a_n}$

. מצא את b ו- c .

ג. נתון שהאיבר הכללי של הסדרה הוא $a_n = \frac{n+b}{n+c}$

ד. ההפרש בין איבר מסוים בסדרה לבין האיבר שלפניו הוא $\frac{20}{99} \cdot 10^{-3}$

מצא את האיבר מסוים.

5) שני רוכבי אופניים רכבו מהעיר A לעיר C. המרחק בין הערים הוא 65 ק"מ. הרוכבים הגיעו למטרתם בשני מסלולים שונים.

הרוכב הראשון רכב ישירות מ-A ל-C.

הרוכב השני רכב תחילה לעיר B, הנמצאת מדרום ל-A. ואחר כך לעיר C. הנמצאת ממערב לעיר B.

שני הרוכבים נסעו במהירות קבועה ושווה.

הרוכב השני הגיע לעיר B שעה לאחר שיצא מ-A והגיע לעיר C 48 דקות אחרי שהרוכב הראשון הגיע אליה.

א. מצא את מהירות הרכיבה של רוכבי האופניים.

ב. באיזה מרחק מהעיר C היה הרוכב השני כאשר הרוכב הראשון הגיע אליה ?

6) את הסדרה החשבונית $1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$

חילקו לקבוצות באופן הבא : $(1), (5, 9), (13, 17, 21), \dots$

בקבוצה ראשונה איבר אחד, בקבוצה השנייה שני איברים, בקבוצה השלישית שלושה איברים וכו'. בכל קבוצה איבר אחד יותר מאשר בקבוצה הקודמת לה.

א. מצא את הנוסחה לאיבר הראשון בקבוצה שבמקום ה-n.

ב. מצא את הנוסחה לסכום האיברים בקבוצה שבמקום ה-n.

7) שני ברזים היו צריכים למלא בריכה. בהתחלה פתחו רק את הברז הראשון ואחרי שעה פתחו את הברז השני.

שעתיים אחרי שפתחו את הברז השני, הברזים מלאו 45% מהבריכה. לאחר מילוי הבריכה התברר שכל ברז מילא מחצית מהבריכה.

א. בכמה שעות ממלא כל ברז לבד את הבריכה ?

ב. איזה חלק מהבריכה מילא כל ברז אחרי שהם מילאו 45% מהבריכה ?

3 בעיות מילוליות וסדרות

1) בכלי יש תמיסת מלח המכילה 4 ק"ג מלח והשאר מים. הוסיפו לכלי 4 ק"ג תמיסת מלח שריכוזה 50%. מהתמיסה שהתקבלה בכלי לאחר ההוספה איידו חצי מכמות המים. לאחר האיידו התקבלה תמיסה שריכוזה גבוה ב- 20% מריכוז התמיסה שהייתה בכלי בהתחלה (לפני ההוספה והאיידו).

א) מהי הכמות של תמיסת המלח שהייתה בכלי בהתחלה (לפני ההוספה והאיידו)?

ב) מהי כמות המים בתמיסה שהתקבלה ?

2) בכלי א' יש כמות מסוימת של תמיסת מלח בריכוז 20%. בכלי ב' יש כמות תמיסת מלח הגדולה ב- 50 גרם מהכמות שבכלי א' וריכוזה הוא 10%. אילו היו מוסיפים 25 גרם מים לכלי א' ומאיידים 56.25 גרם מהתמיסה שבכלי ב' היה מתקבל ריכוז זהה של מלח בשני הכלים.

א. מצא את כמות התמיסה בכלי א'.

ב. מצא את הריכוז הזהה של המלח שהיה מתקבל בשני הכלים.

3) נתונה הסדרה : $1, -4, 7, -10, 13, -16, \dots$. הסימנים של איברי הסדרה מתחלפים

לסירוגין והערכים המוחלטים של האיברים מהווים סדרה חשבונית.

א. הבע באמצעות n את הסכום של :

(1) 2n האיברים הראשונים של הסדרה.

(2) 1-2n האיברים הראשונים של הסדרה.

ב. אם בסדרה הנתונה יש מספר אי זוגי של איברים וסכום כל איברי הסדרה הוא 67

מצא את סכום האיברים העומדים במקומות האי זוגיים.

4) א. הוכח שלכל n טבעי מתקיים :

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \dots + (4n+3) = 3n^2 + 8n + 4$$

מוגדרת לכל n טבעי לפי a_n ב. הסדרה

$$a_n = 48n - 89 - b_n$$

כאשר

$$b_n = (2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \dots + (4n+3)$$

a_n ? כמה איברים חיוביים יש בסדרה

הוכח

שעבור כל n טבעי

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$$

מתחלק ב-900 ללא שארית .

הוכח

שעבור כל n טבעי

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$$

מתחלק ב-900 ללא שארית .

הוכח

שעבור כל n טבעי

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$$

מתחלק ב-900 ללא שארית .

הוכח

שעבור כל n טבעי

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$$

מתחלק ב-900 ללא שארית .

הוכח

שעבור כל n טבעי

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$$

מתחלק ב-900 ללא שארית .

הוכח

שעבור כל n טבעי

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$$

מתחלק ב-900 ללא שארית .

הוכח

שעבור כל n טבעי

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36 .$$

מתחלק ב-900 ללא שארית .

ההעשרה

באיזו ספרה מסתיימות התוצאות האלה :

$$6^{10^{100}}$$

$$6^1 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{129}$$

$$7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{49} \quad \boxed{?}$$

חלק ב – גיאומטריה וטריגונומטריה

גיאומטריה 1

1) BD, CE הם חוצי הזוויות B ו- C במשולש ABC הנחתכים בנקודה O כך שמתקיים

$$OB = OE$$

(א) נתון: $\angle A = 40^\circ$. מצא את הזוויות B ו- C .

(ב) הוכח: $\angle ABC = 2\angle BAC$. (ללא א').

2) BD ו- CE הם חוצי הזוויות B ו- C במשולש ABC הנחתכים בנקודה O .
 $\angle BOC > 90^\circ$ (א) הוכח:

חשב את זווית A . $\angle BOC = 110^\circ$ (ב) נתון:

(3) זוויות המשולש הן α, β, γ .

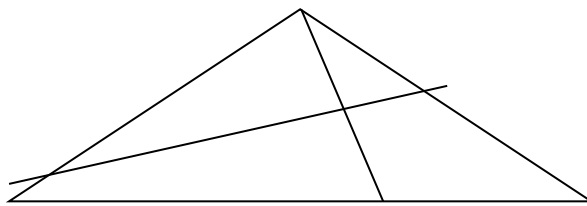
מצא אותן אם נתון: $\alpha : \beta = 3 : 2$, $\beta : \gamma = 4 : 5$.

(4) BD הוא חוצה הזווית $\angle ABC$ במשולש ABC .

E נקודה על BC כך שמתקיים:

$$AE = CE, \angle BAE = 90^\circ$$

$\angle ADB = 45^\circ$ הוכח:

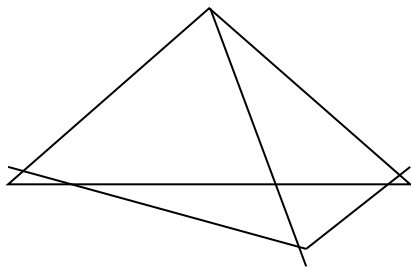


(5) D היא נקודה על הצלע BC של משולש ABC . נתון
 $\angle ADB = 45^\circ$
 $AC = AD = BD$

$45^\circ < \angle BAC < 180^\circ$ הוכח:

(6) בציר נתון: $AB = AC = AD$.

$\angle BAC = 2\angle BDC$ הוכח:



גיאומטריה 2

1) המשולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים.

נתון: $AO = AB$, $\angle BAO = 30^\circ$.

הוכח: $BO = CO$.

2) AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC .

$$AD < \frac{AB + AC}{2} \quad \text{הוכח:}$$

3) AD הוא חוצה הזווית A במשולש ישר זווית ABC שבו BC = AC .

$$\text{נתון: } DC = 0.5BD$$

$$\text{הוכח: } \angle B = 30^\circ$$

4) AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC .

הוכח עפ"י הנתונים בציור שהמשולש

ABC הוא ישר זווית.

5) במקבילית ABCD האלכסונים AC ו-BD נחתכים בנקודה O .

$$\text{נתון: } AB > BC \quad \text{הוכח: } \angle AOB > \angle BOC$$

6) המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AB כך שמתקיים $AE = AB$. הנקודה F נמצאת על המשך הצלע BC כך שמתקיים $CF = CB$.

הוכח: הנקודות E, D, F נמצאות על ישר אחד.

7) במעוין ABCD זווית B שווה ל- 60° .

$$\text{נתון: } AL = BK$$

$$\text{הוכח: א) } CL = CK$$

ב) המשולש CLK שווה צלעות .

טריגונומטריה - 1

1. הוכח זהויות הבאות:

$$1) \dots 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2) \dots \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = 2 \sec \alpha \dots (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$3) \dots 1 + \frac{\cos x \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cos x} = \sec x$$

$$4) \dots 2(\sin^6 \beta + \cos^6 \beta) - 3(\sin^4 \beta + \cos^4 \beta) + 1 = 0$$

$$5) \dots \sin^6 \gamma + \cos^6 \gamma + 3 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma = 1$$

2. נתון:

$$\sin \rho + \cos \rho = 0.5$$

חשב:

$$\sin^6 \rho + \cos^6 \rho$$

3. פשט :

$$1) \dots \frac{\sin^2 11^\circ + \sin^2 79^\circ}{\cos^2 53^\circ + \cos^2 37^\circ}$$

$$2) \dots \frac{2 \cos 13^\circ \cos 43^\circ - \cos 56^\circ}{2 \sin 58^\circ \cos 13^\circ - \sin 71^\circ}$$

$$3) \dots \frac{\cos(3\delta - \frac{21\pi}{4})}{\sin(3\delta - \frac{3\pi}{4})}$$

4. השווה בין שני ביטויים :

$$1) \dots \cos^2 37^\circ + \sin^2 38^\circ \dots \sin^2 37^\circ + \cos^2 38^\circ$$

$$2) \dots \frac{\sin 112^\circ}{16 \sin 7^\circ} \dots \cos 7^\circ \cos 14^\circ \cos 28^\circ \cos 56^\circ$$

$$3) \dots \frac{\sin 12^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 12^\circ - \sin 10^\circ} \dots \frac{\operatorname{tg} 11^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ}$$

5. פתור משוואות הבאות:

$$1) \dots 2 \cos\left(4x + \frac{\pi}{11}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$2) \dots \operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3) \dots \operatorname{ctg}(3x - 2) = \operatorname{tg}(4x + 3)$$

$$4) \dots \sin(-5x + 2) = \sin(-2x - 1)$$

$$5) \dots \cos(-4x + 5) = \cos(-3x - 1)$$

$$6) \dots \sin^4 9x - \cos^4 9x = \cos 11x$$

$$7) \dots 5 \cos 2y - 6 \sin y - 1 = 0$$

$$8) \dots \cos 6\pi z \sin 9\pi z = \cos \pi z \sin 14\pi z$$

$$9) \dots \cos^4 5x - \sin^4 5x = \sin x$$

$$10) \dots \frac{\sin\left(9x - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)} = 0$$

$$11) \dots \frac{2}{\sin x} + 13 \cos x = -13 \sin x$$

$$12) \dots \cos 2x - \cos x = 0$$

$$13) \dots \cos^2 x + \sin^2 \frac{x}{2} - 1 = 0$$

בעיות של גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

1) AC ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.

AC ו-BO נחתכים בנקודה D.

. שטח המשולש CBD גדול פי 1.5 משטח המשולש CDO. $\angle CBO = 2\angle ACB$. נתון :

חשב הזווית CBO.

2) במרובע ABCD חסום מעגל שרדיוסו R. נקודת ההשקה של הצלע AD היא E ונקודת ההשקה של הצלע BC היא F.

$$AE \cdot ED = R^2 \text{ : נתון}$$

א. הוכח : $AB \parallel DC$.

ב. $\frac{BF}{FC} = \frac{1}{3}$. חשב את הזווית C. נתון :

ג. נסמן ב-G את נקודת ההשקה של הצלע DC.

נתון :

הבע באמצעות BF את האלכסון BD. $DG = 2BF$.

3) המרובע ABCD הוא מעוין. הנקודה E היא אמצע DC.

נתון :

$$\angle ADC = \beta$$

$$DE = k$$

א. הבע את AE ואת BE באמצעות k ו- β .

$$\angle AEB = \alpha \text{ ב. נתון :}$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ הוכח :}$$

ג. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.

בעיות במישור

(1) צלעות המשולש פרופורציוניות למספרים 3, 4, 5. מצא יחס בין שטחים של עיגול החסום ועיגול החוסם את המשולש.

(2) זוויות A, B, C של משולש מקיימות שוויון:

$$\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

הוכח ש:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

ישר זווית מתקיים (3) הוכח שבמשולש

$$0.4 < \frac{r}{h_c} < 0.5$$

(i-rדיוס מעגל חסום במשולש, h – גובה ליתר c).

(4) פתור אי-שוויון

$$5 - 7 \sin x - 2 \cos^2 x > 0$$

$$\text{כאשר} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

(5) פשט:

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{b \cos x + \frac{b^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1+b^2 \sin^2 x}}}{b \sin x + \sqrt{1+b^2 \sin^2 x}} \cdot \sqrt{1+b^2 \sin^2 x}$$

(6) בטא הפרש ריבועי אלכסוני המקבילית בעזרת צלעותיו m, n ושטחו S.

(7) בטרפז שווה שוקים קטע אמצעים שווה ל-m, ואלכסוניו מאונכים זה לזה.

מהו שטחו של הטרפז?

גיאומטריה-טריגונומטריה-2

1) נתון משולש CBA . נסמן את אורכי צלעותיו: $CB = dt$, $CA = d$, $BA = 3d$ ($2 < t < 3$)

(א) מצא את t עבורם המשולש קהה זווית.

(ב) נתון: $t = 2.5$. מצא את הזווית של המשולש.

(ג) הנקודה D נמצאת על הצלע BA כך ש-DC חוצה הזווית של C.

(1) בטא את חוצה הזווית של C באמצעות d .

(2) מהו היחס בין שטח המשולש CDB לבין שטח המשולש DCA?

(3) חשב את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DCA.

2) רדיוס גזרה שווה ל R ורדיוס מעגל החסום בגזרה שווה ל r . חשב שטח של הגזרה.

3) פשט:

$$\left(\frac{\cos x}{2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} - \frac{k^2 \sin^2 x \cos x}{2\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} + \frac{\cos x}{2\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$$

כאשר $1 < k < \infty$.

4) הוכח: אם זוויות A, B, C של משולש CBA מקיימות זהות:

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0, \text{ אז, אחת מזוויותיו שווה ל } 60^\circ.$$

5) שני מעגלים שרדיוסיהם R ו- $0.25R$ משיקים זה לזה מבפנים. דרך מרכז של מעגל הגדול עובר קוטר CB המשיק למעגל הקטן. מצא שטח של משולש CBA.

6) מצא זווית חדה של טרפז שווה שוקיים, אם ידוע שטחו S ובסיסיו a, b ($a < b$).

7) נתון משולש CBA. EA ו- DB תיכונים לצלעות CB ו- CA בהתאמה. התיכונים EA ו- DB נחתכים בנקודה O. נסמן: $\angle EAB = \alpha$, $\angle DBA = \beta$, $BA = d$.

(א) הבע את שטח המשולש CBA ושטח המשולש BEO באמצעות d, α, β .

(ב) הוכח כי יחס בין שטח ראשון ובין שני שווה ל 6.

טריגונומטריה במישור

1) במעגל שמחוגו R חסום טרפז. בסיסו הקטן של הטרפז שווה לכל אחת משוקיו והזווית החדה שלו היא α .

א. הבע את שטח הטרפז באמצעות α ו-R.

ב. הראה שהביטוי שמצאת בסעיף א' מבטא גם את שטחו של ריבוע החסום במעגל שמחוגו R.

2) α, β, γ הן זוויותיו של משולש R. הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש. הבע את r, רדיוס המעגל החסום במשולש, באמצעות α, β, γ ו-R.

3) ABC הוא משולש חד זווית. נסמן ב-H את נקודת המפגש של גבהים. נתון: $\angle BAC = \alpha$,

$\angle ABC = \beta$. הבע את היחס בין שטח המשולש ABH לבין שטח המשולש ABC באמצעות זוויות המשולש α, β .

ב. הוכח על סמך סעיף א' שאם α, β, γ הן זוויותיו של משולש חד זווית אז מתקיים:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} = 1$$

4) במחומש המשוכלל ABCDE האלכסונים AD ו-CE נפגשים בנקודה F. א.

2 \cos הוכח: היחס שבין שטח המשולש CDF לבין שטח המשולש EDF הוא 36°

ב. הוכח: היחס שבין שטח המרובע ABCF לבין שטח המחומש ABCDE הוא $1.6 \sin^2 36^\circ$.

5) משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R. BC הוא קוטר במעגל. D היא נקודה על הקוטר

BC. המשך הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E. נתון: $\angle ACB = \alpha, \angle AED = \beta$.

א. הבע את AD ואת DE באמצעות R, α ו- β .

ב. נתון: $\beta = 180^\circ - 2\alpha$. הבע את DE באמצעות R.

בעיות טריגונומטריה במישור

1) בטרפז ישר זווית ABCD, שבו AB הוא הבסיס הגדול והזווית A היא זווית ישרה, נתון שהזווית החדה ליד B היא β ($45^\circ < \beta$)

מרחק הקודקוד A מהשוק BC הוא k. בטרפז זה שווה הבסיס הגדול לאלכסונו הקטן של טרפז. הוכח ששטח הטרפז הוא :

$$k^2 \sin 2\beta$$

2) צלע אחת במשולש גדולה פי 2 מצלע שנייה. כאשר הגדילו את הזווית שבין שתי הצלעות הנ"ל פי 2 גדלה הצלע השלישית פי 1.5.

א. חשב את הזווית שבין שתי הצלעות הנ"ל.

ב. חשב את היחס בין שטח המשולש לאחר שהגדילו את הזווית לבין שטח המשולש לפני שהגדילו את הזווית.

3) שתי צלעות של משולש הן 5 ס"מ ו-8 ס"מ. רדיוס המעגל החוסם את המשולש הוא

$$\frac{7}{\sqrt{3}} \text{ ס"מ}$$

חשב את הזווית שבין שתי הצלעות הנ"ל.

4) במשולש שווה שוקיים התיכון לשוק גדול פי 2 מהגובה לבסיס.

א. מצא את זווית הבסיס של המשולש.

ב. מצא פי כמה גדול בסיס המשולש מהתיכון לשוק.

5) במשולש שווה שוקיים היחס בין רדיוס המעגל החסום במשולש לרדיוס המעגל החוסם את המשולש הוא $\frac{4}{9}$. מצא את זווית הבסיס של המשולש.

6) בטרפז שזוויות הבסיס התחתון הן α ו- β חסום מעגל שרדיוסו r.

הבע באמצעות α , β , r את שטח הטרפז והוכח שהוא שווה

$$2r^2 \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right) \text{ . הוכח שאם } \alpha = 45^\circ, \beta = 75^\circ \text{ אז השטח הוא}$$

$$2\sqrt{6}r^2 \text{ .}$$

בעיות של גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

1. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל. הנקודה D נמצאת על הקשת AC.

נתון: $CD = c$, $BD = b$, $AB = AC = a$.

א. הוכח: $c < a < b$.

ב. הבא את BC^2 באמצעות a , b , c והראה שמתקיים:

$$BC^2 = \frac{a^2(b-c)^2}{a^2 - bc}$$

ג. הסבר על סמך התשובה לסעיף ב' מדוע שטח המשולש ABC יותר גדול משטח המשולש BDC.

2. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) בנו על השוק AC (כלפי חוץ) משולש שווה שוקיים AFC כך

שמתקיים $CF = AF = BC$.

נסמן: $\angle ABC = \alpha$, $\angle AFC = \beta$.

א. הוכח:

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{8 \cos^2 \alpha}$$

ב. נתון:

$$BF = 2BC \cdot \cos\left(67.5^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

חשב את זוויות המשולש ABC.

3. מנקודה הנמצאת מחוץ למעגל במרחק k ממרכזו יוצאים שני משיקים למעגל שהזווית ביניהם 2β ($\beta > 45^\circ$). מהנקודה הנ"ל מעבירים ישר מאונך לאחד המשיקים.

א הוכח שאורך המיתר שהישר חותך מהמעגל הוא: $2k\sqrt{-\cos 2\beta}$

ב. חשב את הזווית β . נתון שהיחס בין רדיוס המעגל למיתר הנ"ל הוא $\frac{\sqrt{6}}{4}$.