

88-235 אנליזת פורייה – מועד ב'

מרצה: דר' ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד
משקל כל שאלה: 28 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

$$1. \text{ יהי } a \in \mathbb{R} \text{ עבורו } 0 < a < \pi \text{ ותהי הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

א. הוכיחו כי טור הפוריה של f הינו $\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(na)}{\pi n} \cos(nx)$

ב. חשבו את הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(na) \cos(na)}{\pi n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sin(na)}{\pi n}$

2. העזרו בטור מהשאלה הראשונה וחשבו את הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$

3. תהי f פונקציה בעלת נגזרת f' רציפה.

נסמן את מקדמי טור הסינוסים של f ב $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

א. הביעו את מקדמי טור הקוסינוסים של f' באמצעות b_n ו f .

ב. הביעו את $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_{2n-1} = b_1 - b_3 + b_5 - \dots$ באמצעות f .

(אין קשר בין הסעיפים.)

4.

א. (14 נק') חשבו את התמרת הפורייה של $f(x) = e^{-|x|}$.

ב. (10 נק') הוכיחו כי $\frac{\pi}{e^{\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi s}}{1+s^2} ds$

ג. (4 נק') חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2} dx$