חזרה

....

נגדיר $A_1 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in X | x_1 = 1\}$, ואת S_1 להיות ה־σ־אלגברה ה"נוצרת" ע"י A_1 - ז"א S_1 היא ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר שבה A_1 מדידה(נמצאת) $S_1 = \left\{\phi, A, A^{\complement}, X\right\}$.

נמשיך להגדיר $A_2 = \{(x_i) \in X | x_2 = 1\}$. S_2 תהיה ה־σ־אלגברה ה<u>נוצרת</u> ע"י כל הקבוצות ב$S_1 + A_2$ - ז"א

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, X, A, A^{\complement}, A_2, A_2^{\complement}, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_2^{\complement}, A_1^{\complement} \cup A_2, A_1^{\complement} \cup A_2^{\complement} \\ A_1 \cap A_2, A_1^{\complement} \cap A_2, A_1 \cap A_2^{\complement}, A_1^{\complement} \cap A_2^{\complement} \end{array} \right\}$$

נמשיך באופן רקורסיבי: S_{n+1} תהיה ה־σ־אלגברה המינימלית שבה כל הקבוצות מS_n וגם הקבוצה $A_{n+1} = \{(x_i) \in X | x_{n+1} = 1\}$.

ע"פ הבנייה הסדרה עולה: $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$. נוכיח כי $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ אינה σ־אלגברה.

נראה כי $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \notin S$. כל ה$A_n$ים נמצאים ב$S$, ולכן אם S באמת σ־אלגברה צריך להתקיים $A \in S$. אבל $A = \{(1,1,1,\dots)\}$ והיא לא נמצאת בשום S_n(כי A אינה ריקה ואינה אינסופית). מכאן S אינה σ־אלגברה.

הערה

אם היה מדובר בסדרה עולה וסופית, $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_N$, אזי $\bigcup_{n=1}^{N} S_n = S_N$ וכן σ־אלגברה.

תרגיל 3

הוכח כי אם (X, S, μ) הינו ממ"ח, $B \in S$, ונגדיר $\nu(A) = \mu(A \cap B)$ לכל $A \in S$ אזי ν מידה על S.

הוכחה

I. $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$

II. לכל $A \in S$ $\nu(A) = \mu(A \cap B) \geq 0$ ולכן $\nu : S \to [0, \infty]$.

III. σ־חיבוריות: תהי $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות זרות בזוגות מתוך S.

$$\nu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(B \cap \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} (B \cap E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

תרגיל 4

נניח כי $\varepsilon \in (0,1)$, m היא מידת לבג על $\mathbb{R}$.
מצאו קבוצה מדידה(לבג) E המקיימת $E \subseteq [0,1]$, $\overline{E} = [0,1]$, ו$m(E) = \varepsilon$.

פתרון

$$E = [0,\varepsilon] \cup (\mathbb{Q} \cap [0,1])$$

$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ בתור חיתוך ואיחוד של קבוצות מדידות לבג.

$$[0,\varepsilon] \subseteq E = [0,\varepsilon] \cup (\mathbb{Q} \cap [0,1])$$

$$\varepsilon = m([0,\varepsilon]) \leq m(E) = m([0,\varepsilon] \cup (\mathbb{Q} \cap [0,1])) \leq m([0,\varepsilon]) + \cancel{m(\mathbb{Q} \cap [0,1])} = \varepsilon$$

$$m(E) = \varepsilon$$

תרגיל 5

אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה לבג, הוכיחו כי קיימת פונקציה מדידה בורל, g, כך ש$f = g$ כב"מ ב$\mathbb{R}$.

פתרון

משפט(Lusin): תהי f פונקציה מדידה המוגדרת על קבוצה E שמידתה סופית. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה רציפה g על $\mathbb{R}$, וקבוצה סגורה $F \subseteq E$ כך ש$f = g$ על F ו$m(E \backslash F) < \varepsilon$.

נוכיח(את התרגיל) קודם עבור f המוגדרת על הקטע $E = [-L, L]$ שהוא בעל מידה סופית($2L$).

ע"פ משפט Lusin קיימת קבוצה סגורה F_n בE כך שקיימת פונקציה רציפה g_n ו$f = g$ על F_n, וכן $m(E \backslash F_n) < \frac{1}{2^n}$.

נגדיר $\overline{m} = \frac{m}{2L}$. $\overline{m}$ היא מידת הסתברות. ע"פ הנתון, לכל $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}(\{|g_n - f| > \varepsilon\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2L} m(\{|g_n - f| > \varepsilon\}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2L} \cdot \frac{1}{2^n} < \infty$$

לפי בורל־קנטלי $f = g_n$ כב"מ בקטע $[-L, L]$.

למה: תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסות לפונקציה f. אזי f מדידה בורל.

הוכחה: נשים לב כי $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \{f \leq \alpha\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{f_n \leq \alpha + \frac{1}{r}\}$. f_n רציפות, וכל הדבר הזה = $f_n^{-1}((-\infty, \infty])$.

ע"פ הלמה לעיל נקבל כי $g(x) := \lim_{n \to \infty} g_n(x)$ מדידה בורל, וכבר ראינו כי $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$ בקטע E, פרט אולי לקבוצה ממידה 0.

הגדרה

מידה μ המוגדרת על σ־אלגברת בורל נקראת רגולרית חיצונית אם לכל קבוצת בורל B מתקיים $\mu\left(B\right)=\inf\left\{ \mu\left(U\right)\left|\begin{array}{c} B\subseteq U\\ U\text{ is open} \end{array}\right.\right\}$.

תרגיל 7

נניח כי μ,ν הנן מידות חיוביות רגולריות חיצוניות המוגדרות על σ־אלגברת בורל בקטע $[0,1]$ כך ש$\int_{[0,1]}f\,\mathrm{d}\mu=\int_{[0,1]}f\,\mathrm{d}\nu$ לכל פונקציה רציפה f בקטע $[0,1]$. הוכח כי $\mu=\nu$.

פתרון

הקטעים הפתוחים בקטע $[0,1]$ הם מהאוסף

$$\left\{ (a,b)|0\leq a\leq b\leq1\right\} \cup\left\{ [0,a)|0<a<1\right\} \cup\left\{ (b,1]|0<b<1\right\}$$

והם יוצרים את σ־אלגברת בורל של הקטע $[0,1]$.

נוכיח שלכל a $\mu\left([0,a)\right)=\nu\left([0,a)\right)$. לצורך כך נגדיר סדרת פונקציות $\{f_n\}$:

- בקטע $\left[0,a-\frac{1}{n}\right)$ הפונקציה f_n קבועה ושווה 1.
- בקטע $\left[a-\frac{1}{n},a\right]$ הפונקציה יורדת לינארית מ1 עד 0.
- בקטע $[a,1]$ הפונקציה עדיין 0.

$f_n\xrightarrow{n\to\infty}I_{[0,a)}$ וf_n רציפות. ע"פ משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\begin{array}{ccccccc}
\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n\,\mathrm{d}\mu & = & \int_{[0,1]}\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)\,\mathrm{d}\mu & = & \int_{[0,1]}I_{[0,a]}\,\mathrm{d}\mu & = & \mu\left([0,a)\right)\\
|| & & & & & & ||\\
\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n\,\mathrm{d}\nu & = & \int_{[0,1]}\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)\,\mathrm{d}\nu & = & \int_{[0,1]}I_{[0,a]}\,\mathrm{d}\nu & = & \nu\left([0,a)\right)
\end{array}$$