**חשבון אינפי 2 למדמ"ח**

**תרגיל 4- פתרון**

1. חשבון את האינטגרלים הבאים:

**א.** $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

**פתרון:**

$$\begin{Bmatrix} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{Bmatrix}$$

$$=\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6\left(1+t^2\right)}\cdot 6t^5dt=6\int \frac{t^5+t^3+1}{\left(1+t^2\right)}dt=6\int t^3dt+6\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{3}{2}t^4+6\arctan t+c=\frac{3}{2}x^{2/3}+6\arctan x^{1/6}+c$$

**ב.** $\int \frac{2}{\left(2-x\right)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

**פתרון:**

$$\frac{2-x}{2+x}=t^3$$

$$2-x=\left(2+x\right)t^3$$

$$2-2t^3=x\left(t^3+1\right)$$

$$x=\frac{2-2t^3}{t^3+1}=2\cdot\frac{1-t^3}{t^3+1}$$

$$dx=2\cdot\frac{\left(-3t^2\left(t^3+1\right)-3t^2\left(1-t^3\right)\right)}{\left(t^3+1\right)^2}dt=\frac{-12t^2}{\left(t^3+1\right)^2}dt$$

$$2-x=2-\frac{2\left(1-t^3\right)}{\left(t^3+1\right)}=\frac{4t^3}{t^3+1}$$

$$\int \frac{2}{\left(2-x\right)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx=\int \frac{2\left(t^3+1\right)^2}{16t^6}\cdot t\cdot\left(\frac{-12t^2}{\left(t^3+1\right)^2}\right)dt$$

$$=\int \frac{-24t^3}{16t^6}dt=-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4}\frac{1}{t^2}+c=\frac{3}{4}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2/3}+c$$

**ג.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^4}}$

**פתרון:**

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$\frac{x-1}{x+1}=t^3$$

$$x-1=t^3(x+1)$$

$$x\left(1-t^3\right)=t^3+1$$

$$x=\frac{t^3+1}{1-t^3}$$

$$dx=\frac{3t^2\left(1-t^3\right)+3t^2\left(t^3+1\right)}{\left(1-t^3\right)^2}dt=\frac{6t^2}{\left(1-t^3\right)^2}dt$$

$$x-1=\frac{t^3+1}{1-t^3}-1=\frac{t^3+1-1+t^3}{1-t^3}=\frac{2t^3}{1-t^3}$$

$$x+1=\frac{t^3+1}{1-t^3}+1=\frac{t^3+1+1-t^3}{1-t^3}=\frac{2}{1-t^3}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}=\int\frac{6t^2\cdot\left(1-t^3\right)^2}{\left(1-t^3\right)^2 4t^3\cdot t}dt=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{3}{2}\frac{1}{t}+c=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+c$$

**2.** חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}}\frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{x^2}\tan\left(t-\frac{\pi}{3}\right)dt}{\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)^2}$$

**פתרון:**

זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$" וכל התנאים של כלל לופיטל מתקיימים ולכן

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}}\frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{x^2}\tan\left(t-\frac{\pi}{3}\right)dt}{\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)^2}=\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}}\frac{2x\tan\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2x}=\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}}\frac{\tan\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{3}}}\frac{\sin\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)}\cdot\frac{1}{\cos\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2}$$

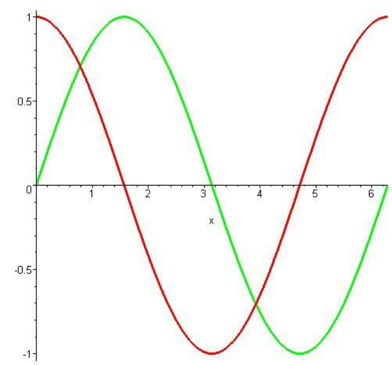
כדי לגזור את המונה השתמשנו במשפט היסודי של החשבון האינטגרלי.

**3.** מצאו את שטח התחום הכלוא בין העקומות :

**א.** $y=\sin x \;,\; y=\cos x \;,\; x=0 \;,\; x=2\pi$

**פתרון:**

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx=4\sqrt{2}$$




**ב.** $y=x\sin x$ ל- $y=x$ , כאשר $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

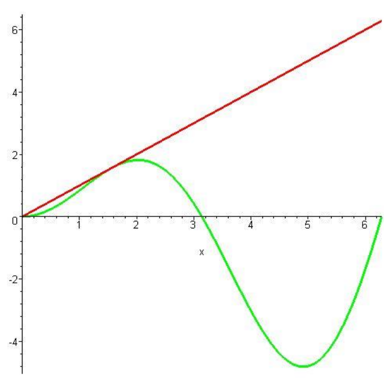
**פתרון:**

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx$$

$$\begin{Bmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=1-\sin x & v=x+\cos x \end{Bmatrix}$$

$$=x(x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)dx=$$

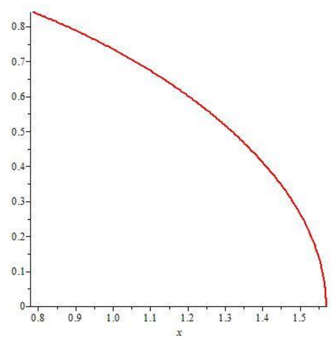
$$=\frac{\pi^2}{4}-\left(\frac{x^2}{2}+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-1$$



**.4**

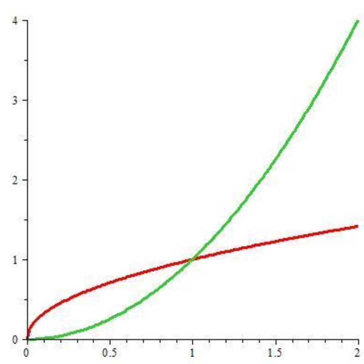
**א.** מצאו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום החסום ע"י
$y=\sqrt{\cos x}, x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{2}, y=0$
סביב ציר ה - $x$.

**פתרון:**



$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cos x}\right)^2 dx=\pi\sin x\ \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**ב.** מצאו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום החסום ע"י $y=x^2, x=y^2$ סביב ציר ה - $y$.
**פתרון:**



נמצא את נקודות החיתוך של שתי העקומות

$$y=x^2, x=y^2$$

$$x^4=x$$
$$x\left(x^3-1\right)=0$$
$$x_1=0, x_2=1$$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2dy-\pi\int_0^1\left(y^2\right)^2dy=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^1-\frac{\pi}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$$

**5.** חשבו את אורך הקשת של העקומות הבאות:

**א.** $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ מ- $x=a$ ל- $x=b$ כאשר $b>a>0$

**פתרון:**

$$y'=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}dx=\int_a^b\sqrt{\frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}dx=\int_a^b\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$$
$$=\int_a^b\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx+\int_a^b\frac{1}{e^{2x}-1}dx$$

נציב

$e^{2x}-1=t$, $2e^{2x}dx=dt$, $e^{2x}dx=\frac{1}{2}dt$ באינטגרל השמאלי ו- $e^{2x}-1=t$, $2e^{2x}dx=dt$, $dx=\frac{1}{2\left(t+1\right)}dt$ באינטגרל הימני

נקבל

$$\int_a^b\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx+\int_a^b\frac{1}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t\left(t+1\right)}dt=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t}dt-\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t+1}dt=\ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2b}}{e^{2a}}\right|=\ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right|-\ln\left|\frac{e^b}{e^a}\right|=\ln\left|\frac{e^a\left(e^{2b}-1\right)}{e^b\left(e^{2a}-1\right)}\right|$$

**ב.** $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ מ- $y=1$ ל- $y=2$ .

**פתרון:**

$$x'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}$$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}dy=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}dy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}\ln|y|\Big|_1^2=1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$