

בוחר בחשבון אינפיניטיסימלי 1

יש לענות על כל השאלות. הקפידו לנמק היטב את תשובותיכם.

1. (33 נק') תהי A קבוצה של מספרים ממשיים חיוביים. נגדיר $A^{-1} = \{\frac{1}{a} \mid a \in A\}$. הוכיחו כי

(א) $\inf A = m$ אם ורק אם $\sup A^{-1} = \frac{1}{m}$ (כאשר $m > 0$)

(ב) $\inf A = 0$ אם ורק אם A^{-1} אינה חסומה מלעיל.

2. (א) (24 נק') נגדיר סדרה באמצעות כלל הנסיגה

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, \quad a_1 = \sqrt{3}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהינה a_n, b_n שתי סדרות חסומות כך ש $b_n \leq a_n$ אזי $\liminf a_n \leq \liminf b_n$ (כלומר $\limsup b_n \leq \limsup a_n$).

3. האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים? נמקו.

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{\ln(n)}}$ (11 נק')

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$ (11 נק')

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(n)}{n^2 + 2n + 4}$ (11 נק')