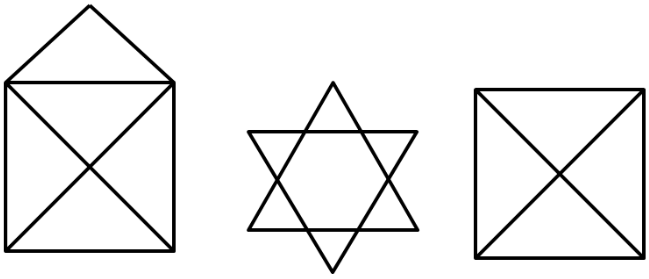
<u>מבוא לתורת הגרפים</u>

<u>מוטיבציה:</u>

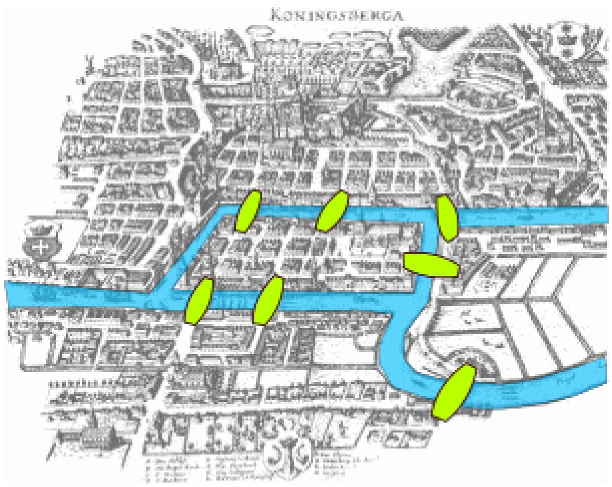
ציירו כל אחד מהשרטוטים הבאים במשיכת עט אחת, כלומר, בלי להרים את העט מהדף.



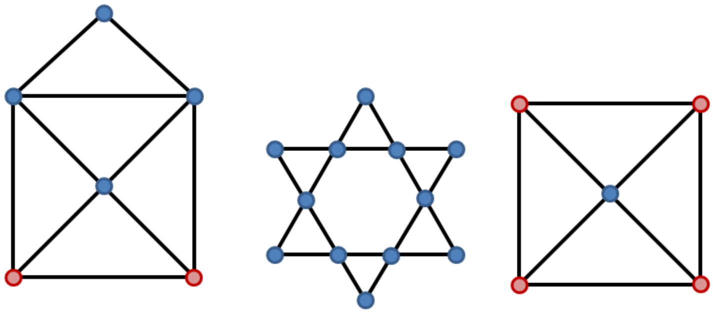
1 2 3

עבור שרטוט 3 הדבר אינו אפשרי.
נשאלת השאלה, האם ניתן לאפיין עבור אילו צורות זה אפשרי ועבור אילו לא.

<u>בעיית הגשרים של קנינגסברג:</u>
אוילר, שנחשב לאבי תורת הגרפים, עבד בעיר קנינגסברג בה שבעה גשרים. עלתה השאלה אם ניתן לתכנן מסלול טיול המבקר בכל גשר בדיוק פעם אחת?



אוילר נתן תשובה מלאה אותה ננסח במדויק ונוכיח בהמשך: עוברים על כל הקודקודים (פינות או נקודות היתוך של קווים) ומוצאים לכמה מהם נכנסים מספר זוגי של קווים ולכמה אי-זוגי. אם מספר הקודקודים עם מספר אי זוגי של קווים הוא אפס או 2, ניתן לשרטט את הצורה במשיכה אחת. אחרת לא.



1 2 3

<u>הגדרה:</u> גרף הוא זוג סדור $G=(V,E)$ כאשר
V היא קבוצה שאבריה נקראים קודקודים. Vertices.
$E\subset V\times V$ נקראים צלעות או קשתות. edges.

אנו נניח כי V סופית וכי E לא מכילה לולאות, כלומר E הוא יחס אנטי-רפלקסיבי ($\forall v\in V,(v,v)\notin E$).

<u>הגדרה:</u> אם E יחס סימטרי אז G נקרא גרף לא מכוון. אחרת נקרא גרף מכוון.
בגרף מכוון, אם uEv נסמן $\{u,v\}\in E$.
בפרט, העוצמה של E היא מספר הקשתות (שהוא חצי ממספר הזוגות הסדורים).

<u>הגדרה:</u> $|V|$ נקרא הסדר של הגרף.

דוגמאות פשוטות. שרטוט בעזרת דיאגרמה.

מעתה נדבר רק על גרפים לא מכוונים.

<u>הגדרה:</u> שני קודקודים $u,v\in V$ נקראים שכנים אם $\{u,v\}\in E$.
אם u,v שכנים נאמר כי הקשת $\{u,v\}$ חלה ב u או ב v.

<u>הגדרה:</u> $\Gamma(u)$ היא קבוצת השכנים של קודקוד u.
תהי $S\subset V$. $\Gamma(S)$ היא איחוד כל קבוצות השכנים של איברים ב S,
$\Gamma(S)=\left\{v\in V\mid \exists u\in S,\{u,v\}\in E\right\}$.

<u>הגדרה:</u> הדרגה (degree) של קודקוד u היא מספר הצלעות החלות ב V, $\deg(u)=|\Gamma(u)|$.

<u>משפט:</u> (משפט לחיצת הידיים).
בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ מתקיים $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.
הוכחה: נספור את מספר הקשתות החלות בכל קודקוד, כלומר, נסכם את כל הדרגות. כל צלע $\{u,v\}$ תיספר בדיוק פעמיים – פעם ב u ופעם ב v.

<u>הגדרה:</u> סדרת קודקודים $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ כך ש $\forall i=1\ldots n,\{v_{i-1},v_i\}\in E$ נקראת מסלול.
- מסלול נקרא פשוט אם כל הקודקודים לאורך המסלול שונים, מלבד אולי $v_0=v_n$.
- אם $v_0=v_n$ אז המסלול נקרא מעגל.
- אורך המסלול הוא n.

<u>הגדרה:</u> המרחק בין שני קודקודים u,v הוא אורך המסלול הקצר ביותר כך ש $v_0=u$ ו $v_n=v$.
אם לא קיים מסלול אז המרחק הוא אינסוף.

<u>הגדרה:</u> קוטר של גרף הוא המרחק הגדול ביותר בין שני קודקודים בגרף.

<u>דוגמאות:</u> דוגמאות פשוטות עם דיאגרמות.
מספר ארדוש, מספר בייקון, מספר ארדוש-בייקון. השיאן של ארדוש-בייקון הוא פרופסור למתמטיקה מ MIT בשם דניאל קליטמן (Daniel Kleitman). הוא כתב מאמר עם פול ארדוש.

בנוסף, הוא שימש כיועץ לסרט Good Will Hunting וכ"בונוס" הופיע כניצב באחת הסצינות. בסרט משתתפת השחקנית מיני דרייבר ששיחקה לצד קווין בייקון בסרט Sleepers. לכן לדניאל קליטמן מספר ארדוש-ביקון 3.

<u>הגדרה:</u> גרף נקרא קשיר אם בין כל שני קודקודים קיים מסלול.

<u>הגדרה:</u> קשירות בין קודקודים מגדירה יחס שקילות. מחלקות השקילות נקראות מחלקות קשירות.

<u>טענה:</u> (אפשר לדלג) בגרף קשיר לא מכוון עם n קודקודים יש לפחות $n-1$ צלעות.
הוכחה: נוכיח שאם בגרף יש $k \le n-1$ צלעות אז יש לפחות $n-k$ מחלקות קשירות. זה מוכיח את הטענה.
אינדוקציה על k.
$k=0$: טריוויאלי.
נניח עבור k, נוכיח עבור $k+1$. נוריד קשת אחת. נותרנו עם גרף בו לפחות $n-k$ מחלקות קשירות. אם נחזיר את הקשת יקרה אחת משתיים: מספר מחלקות הקשירות לא ישתנה או שיקטן ב 1.

<u>טענה:</u> (אפשר לדלג) בגרף קשיר עם $n \ge 3$ קודקודים ו $k \ge n$ קשתות קיים מעגל.
הוכחה: באינדוקציה על n.
$n=3$: הגרף היחיד עם שלושה קודקודים ו $k \ge 3$ צלעות הוא משולש.
נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור n:
נחלק לשני מיקרים:
1. ב G יש קודקוד מדרגה 1. נוריד אותו. לפי הנחת האינדוקציה בגרף שנשאר יש מעגל.
2. כל הדרגות של כל הקדקודים הן לפחות 2. נבחר כל קדקוד u ו"נצא" לטיול בגרף בלי לחזור אחורה. כיוון שהגרף סופי, חייבים לחזור לקודקוד שכבר ביקרנו בו תוך מספר צעדים $\le n$. זהו מעגל.

<u>הגדרה:</u> מסלול שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא מסלול אוילר.
מעגל שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא מעגל אוילר.

<u>משפט:</u> (אוילר)
יהי G גרף קשיר לא מכוון. ב G קיים מעגל אוילר אמ"ם לכל הקודקודים בגרף יש דרגה זוגית.
הוכחה:
כיוון קל: אם קיים מעגל אוילר אז בכל קודקוד של המעגל מספר הכניסות=מספר היציאות. לכן הדרגה זוגית.

כיוון הפוך: נניח שכל הדרגות זוגיות.

<u>טענת עזר:</u> בגרף לא מכוון שכל דרגותיו זוגיות, כל קודקוד שדרגתו גדולה מאפס שייך למעגל בו כל הקשתות שונות.
הוכחה: יהי v קודקוד שדרגתו חיובית ממש. נצא לטיול בגרף בלי לחזור על צלעות. נמשיך עד שניתקע. נסמן את נקודת הסיום ב x.
נניח ש $x \ne v$. אז כל מעבר של המסלול דרך x תורם 2 לדרגתו, פרט לצעד האחרון שתורם 1 לדרגה. לכן דרגתו של x אי זוגית. סתירה.

נחזור להוכחת משפט אוילר:
יהי v_0 קודקוד בגרף. הגרף קשיר ולכן $\deg(v_0) > 0$. אז קיים מעגל C_1 המתחיל ב v_0. אם $C_1 = E$, סיימנו.

אחרת, נמחק את צלעות C_1 מהגרף ונקבל גרף חדש $G_1=(V,E-C_1)$. ב G_1 לכל הקודקודים דרגות זוגיות.

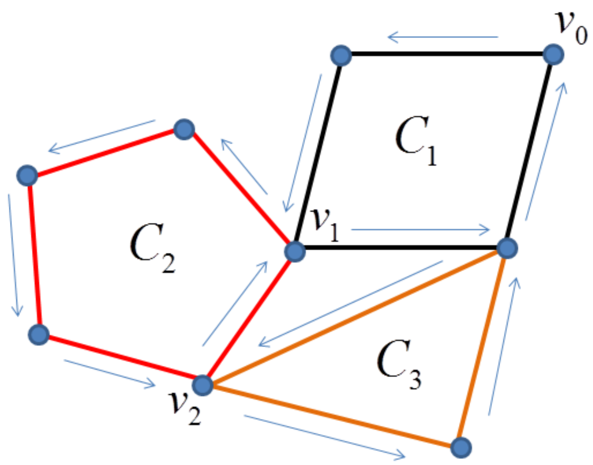
<u>טענה:</u> אם ב G_1 עדין נותרו קשתות, אז אחת מהן חלה ב C_1.
הוכחה: אם C_1 כולל את כל הקודקודים ב V, הטענה טריוויאלית. אחרת, יהי $v\notin C_1$ ו $w\in C_1$.
קיים מסלול ב G שיוצא מ v ל w. לאורך המסלול קיים קודקוד כנדרש.
מסקנה: מבין הקודקודים ב C_1, קיים קודקוד שדרגתו ב G_1 חיובית. נסמן אותו ב v_1.

נמשיך באותו האופן. $\deg(v_1)>0$, ולכן הוא שייך למעגל C_2 בגרף G_1. אם $C_2=E-C_1$, סיימנו.
אחרת, נמחק את צלעות C_2 מהגרף ונקבל גרף חדש $G_2=(V,E-C_1-C_2)$. ב G_2 לכל הקודקודים דרגות זוגיות.
נמשיך באינדוקציה:
לשם כך יש להוכיח את הטענה הבאה:
אם ב G_k עדין נותרו קשתות, אז אחת מהן חלה ב $S_k=C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_{k-1}$.
הוכחה: אם S_k כוללת את כל הקודקודים ב V, הטענה טריויאלית. אחרת, יהי $v\notin S_k$ ו $w\in S_k$. קיים מסלול ב G שיוצא מ v ל w. לאורך המסלול קיים קודקוד כנדרש.
מסקנה: מבין הקודקודים ב S_k, קיים קודקוד שדרגתו ב G_k חיובית. נסמן אותו ב v_k.

כיוון שלכל מעגל שאנו מורידים יש לפחות שתי קשתות, התהליך יסתיים לאחר מספר סופי של צעדים.
בסך הכל קיבלנו מספר סופי של מעגלים "נוגעים".

<u>טענה:</u> יהיו $C_1,\ldots,C_n$ אוסף מעגלים היוצרים גרף קשיר, אז ניתן לכתוב את כל הגרף כמעגל יחיד.
הוכחה באינדוקציה. $n=1$ טריוויאלי. בשלב האינדוקציה נשאר לחבר שני מעגלים נוגעים (עם קודקוד משותף) למעגל אחד.

<u>מסקנה:</u> קיים מעגל אוילר.



מ.ש.ל.

<u>משפט:</u> בגרף קיים מסלול אוילר אמ"ם קיים מעגל אוילר או אם מספר הקודקודים עם דרגה אי-זוגית הוא בדיוק 2.
הוכחה:
אם קיים מעגל סיימנו, כי כל מעגל הוא גם מסלול וכל הקודקודים עם דרגה זוגית.
אחרת, אם יש מסלול או אם יש בדיוק שני קודקודים u_1, u_2 עם דרגה אי זוגית, נרצה להוסיף קשת $\{u_1, u_2\}$ כדי לסגור מעגל/להפוך את כל הדרגות לזוגיות. אם $\{u_1, u_2\} \in E$, לא ניתן להוסיף את הקשת. ניצור קודקוד חדש $x \notin V$ ונוסיף שתי קשתות $\{u_1, x\}$ ו $\{u_2, x\}$.