בעיית LCA - Lowest Common Ancestor (אב קדמון משותף נמוך ביותר)

בהינתן עץ $T=(V,E)$, $|V|=n$ (לאו דווקא בינארי) ושתי קודקודים, רוצים למצוא את הקודקוד הנמוך ביותר המכיל את שניהם.

רוצים למצוא עיבוד מקדים שיעזור לבצע את זה בצורה יעילה.

1. למצוא את שרשרת האבות הקדמונים של שני הקודקודים, ולהשוות ביניהם

   עיבוד מקדים: 0

   שאילתא: $O(n)$

2. לחשב את כל התשובות מראש

   עיבוד מקדים: $\Omega\left(n^2\right)$

   שאילתא: $O(1)$

בעיית RMQ - Range Minimum Query

בהינתן $A=(a_1,a_2,\dots a_n)$, רוצים למצוא

$$\mathrm{RMQ}(i,j)=\min_{i\le k\le j}\{a_k\}$$

1. נאיבי:

   עיבוד מקדים: 0

   שאילתא: $O(n)$

2. לחשב את הכל מראש:

   עיבוד מקדים: $O\left(n^2\right)$

   שאילתא: $O(1)$

אבל יש עוד פתרון, שהעיבוד מקדים שלו הוא $O(n\log n)$ והשאילתא $O(1)$:

נחשב את המינימום לכל האינטרוולים באורך חזקות של 2. כמה זה לוקח? מכל מקום מתחילים עד $\log n$ אינטרוולים שונים, ויש n מקומות - לכן זה לוקח $O(n\log n)$.

ומה לגבי השאילתא? ניקח לדוגמא שאילתא $\mathrm{RMQ}(30,100)$. החזקה הכי גדולה של 2 שנכנסת בין 30 ל100 היא $2^6=64$. לפי הטבלה כבר יש לנו מ30 עד 93 ומ37 עד 100, ואפשר לחשב ב$O(1)$:

$$\mathrm{RMQ}(30,100)=\min\{\mathrm{RMQ}(30,93),\mathrm{RMQ}(37,100)\}$$

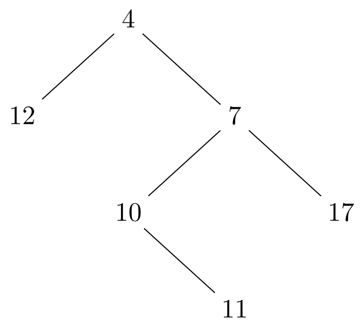
נראה שאפשר לפתור את LCA באמצעות RMQ ולהפך. בשביל זה צריך להגדיר מושג של עץ קרטזי:

עץ קרטזי

נניח שיש לנו מערך של מספרים:

12	4	10	11	7	17

ניקח את האיבר הקטן ביותר להיות השורש, ושני הבנים שלו יהיו שני צדדי המערך באופן רקורסיבי:



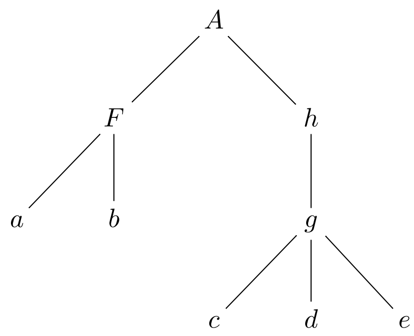
תרגיל: הראה כיצד ניתן לבנות עץ קרטזי ב$O\left(n\right)$ זמן.

נשים לב שהאב הקדמון המשותף הנמוך ביותר בין שני איברים בעץ הוא האיבר הקטן ביותר ביניהם במערך המקורי.

לכן ניתן לפתור RMQ בעזרת LCA ע"י מעבר לעץ קרטזי.

בכיוון השני:

אם יש לנו עץ:



נבצע טיול אויילר על הגרף - נשכפל את כל הקשתות כדי שיהיו שתי קשתות לשני כיוונים, ונבקר בכל קשת פעם אחת(כלומר בכל קשת מקורית פעם אחת לכל כיוון). נרשום מתחת לכל ביקור את העומק שלו:

i	f	a	f	b	f	i	h	g	c	g	d	g	e	g	h	i
1	2	3	2	3	2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	2	1

עוברים על כל קשת פעמיים, ויש $n-1$ קשתות, ולכן הרשימה בעורך $2n-2\in O\left(n\right)$.
הRMQ בין כל שני קודקודים הוא בעצם הLCA, שכן באב הקדמון המשותף כיוון הטיול מתחלף, ואב קדמון יותר גדול יהיה מימין או משמאל להם.

נשים לב שבטיול אויילר שלנו קיבלנו מערך שבו ההפרשים בין ערכים צמודים הם תמיד ±1. זה מאפשר לפתור בצורה יותר יעילה:

$\mathrm{RMQ}\pm1$

התנאי: $\forall_{1\le i\le n-1}\left|a_{i+1}-a_{i}\right|=1$
נראה שאת $\mathrm{RMQ}\pm1$ ניתן לפתור ב$O\left(n\right)$ עיבוד מקדים ו$O\left(1\right)$ שאילתא.

מסקנה: $\mathrm{RMQ}\pm1\implies\mathrm{LCA}\implies\mathrm{RMQ}$