

מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 3

מתרגלים: חוסיין-בן-ארי ולידור אלדב

1. הוכח או הפרך: תהיינה A, B קבוצות, אזי:

א. $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$

ב. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

2. הוכח או הפרך:

א. $A \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$

ב. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

3. תהי קב' A , נסמן $\{B_i\}_{i \in I}$, כאשר $I := P(A)$ ו $B_i := i$ (אוסף כל תת הקבוצות של A).

מצאו:

א. $\bigcup_{i \in I} B_i$ ו $\bigcap_{i \in I} B_i$

ב. $\bigcup_{j \in I} \bigcap_{i \in I} (B_i \cup B_j)$

ג. $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in I} (B_i \cap B_j)$

4. בכל סעיף הוכיחו לגבי היחס R על הקבוצה הנתונה A האם הוא: רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי או טרנזיטיבי.

א. $A := \mathbb{Z}$, $R := \{(x, y) \in A \times A : 3 \mid (x + 2y)\}$ (כאן \mid הוא היחס מחלק את, כלומר

היחס שמקבל ערך אמת אם המספר משמאל מחלק את זה שמימין).

ב. $A := P(\mathbb{N})$, $R := \{(x, y) \in A \times A : x \subseteq y\}$

ג. $A := \mathbb{Q}$, $R := \{(x, y) \in A \times A : (x < y) \vee (y < x)\}$

5. $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ באופן הבא:

$$R := \{((z_1, n_1), (z_2, n_2)) \in ((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)) \mid n_2 z_1 = n_1 z_2\}$$

הוכיחו כי R הינו יחס שקילות (כלומר הוכיחו רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות).

בנוסף: מה הקשר בין היחס R לקבוצת המספרים הרציונליים \mathbb{Q} ?

6. (בנוסף) תהי סדרת קבוצות $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. נאמר כי קבוצה B היא הגבול של הסדרה $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

אם:

$$a \in B \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n > n_0 : a \in A_n)$$

$$a \notin B \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n > n_0 : a \notin A_n)$$

במקרה זה נסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת ל B . אם אין גבול נאמר שהיא מתבדרת.

א. מצאו סדרת קבוצות מתכנסת, וסדרת קבוצות מתבדרת. הוכיחו.

ב. תהי $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת קבוצות המקיימת $\forall n \in \mathbb{N}: A_n \subseteq A_{n+1}$. הוכיחו שהסדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

כלומר $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ מתכנסת וגבולה הוא $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.