...

תרגיל(*)

נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות ובעלת "תנאי שפה הומוגניים" - כלומר $f(a)=f(b)=0$ - ומקיימת $\int_a^b f^2\,\mathrm{d}m=1$.

הוכיחו כי מתקיים

$$\int_a^b xff'\,\mathrm{d}m(x)=-\frac{1}{2}$$

וגם

$$\left[\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}m(x)\right]\left[\int_a^b x^2f^2\,\mathrm{d}m(x)\right]>\frac{1}{4}$$

פתרון

בגלל שהכל רציף נעבוד עם אינטגרל רימן. נשתמש באינטגרציה לפי חלקים:

$$1=\int_a^b 1\cdot f^2(x)\,\mathrm{d}(x)=\cancel{xf^2(x)}\Big|_a^b-\int_a^b 2xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

מחלקים ב(-2) לקבל:

$$\begin{bmatrix} u=f^2 & v=x \\ u'=2ff' & v'=1 \end{bmatrix}\qquad\left|\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$\frac{1}{2}=\left|\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |xf(x)f'(x)|^1\,\mathrm{d}x=$$

$$=\|x\cdot f\cdot f'\|_1\overset{\text{Holder}}{\le}\|f'\|_2\cdot\|xf\|_2=\left(\int_a^b\left(f'(x)^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

אם נעלה בריבוע נקבל $\frac{1}{4}\le\left[\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x\right]$ - אבל רוצים אי שוויון **חזק**.

שוויון מתקבל באי שוויון אויילר אם"ם יש קבועים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, (לא שניהם אפס), כך ש$\alpha\cdot(f'(x))^2=\beta\left(x^2f^2(x)\right)$ כב"מ(במקרה שלנו בכל מקום, בגלל שהפונקציה רציפה).

אם $\alpha=0,\beta\neq0$ אז $x^2\cdot f^2(x)=0$, וזאת סתירה לכך ש$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$.

ואם $\alpha\neq0$:

$$(f'(x))^2=\frac{\beta}{\alpha}\cdot x^2f^2(x)$$

נוציא שורש

$$f'(x) = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot xf(x) = c \cdot xf(x)$$

עושים מד"ר על f: נפריד משתנים:

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = c \cdot x \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{f} = \int c \cdot x \,\mathrm{d}x$$

$$|{}^{n}/{}_{f}| = c \cdot \frac{x^2}{2} + K$$

$$f = A \cdot e^{c\frac{x^2}{2}}$$

האקספוננט אינו מתאפס לעולם, ולכן תנאי השפה $f(x) = f(b) = 0$ מכריחים $A = 0$ $\Longleftarrow$ $f \equiv 0$ $\Longleftarrow$ $\int_a^b f^2 \,\mathrm{d}x = 0 \neq 1$. בסה"כ שוויון לא ייתכן.

תרגיל

יהי (X, S, μ) ממ"ח ממידה סופית($\mu(x) < \mu$), ויהיו $1 \leq r < p < \infty$. הוכיחו כי $L^p(X, S, \mu) \subseteq L^r(X, S, \mu)$.

פתרון

תהי $f \in \mathscr{L}^p$. המספרים $t = \frac{p}{r}, S = \frac{p}{p-r}$ הם "מעריכים צמודים" - כלומר $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$.
ע"פ א"ש הולדר

$$\|f\|_r^r = \int_X 1 \cdot |f|^r \,\mathrm{d}\mu = \||f|^r \cdot 1\|_1 \overset{\text{Holder}}{\leq} \|f^n\|_t \cdot \|1\|_s \leq \|f^n\|_t \cdot \|1\|_s =$$

$$= \left(\int_X (\|f\|^r)^t \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/t} \cdot \left(\int_X 1^{\cancel{s}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/s} =$$

$$= \left(\int_X |f|^{\cancelto{p}{r\cdot t}} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{t}} \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{s}} < \infty$$

נוציא שורש r לקבל $\|f\|_r < \infty \Longleftarrow f \in L^r$.

דוגמה

הממ"ח $([0,1], \mathscr{L}, m)$ סופי.

ידוע כי $x^{-\frac{1}{4}} \in L^2([0,1])$, כי

$$\int_0^1 \left|x^{-\frac{1}{4}}\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 < \infty$$

וע"פ התרגיל גם

$$\int_0^1 \left|x^{-\frac{1}{4}}\right| \mathrm{d}x < \infty \implies x^{-\frac{1}{4}} \in L^1$$

הערה

אם הממ"ח ממידה ∞, אין הכלה(ש"ב)

תרגיל

נתבונן בממ"ח $([0,1], \mathscr{L}, m)$ ונגדיר סדרת פונקציות ע"י

$g_n(x) = n \cdot I_{[0,n^{-3}]}(x)$

א. הוכיחי כי לכל $f \in L^2([0,1])$ מתקיים $\int_0^1 f \cdot g_n \,\mathrm{d}m \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ב. הראו שיש $f \in L^1([0,1])$ כך ש$\int_0^1 f g_n \,\mathrm{d}m \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$.

פתרון

א.

$$d\left(\int_0^1 f \cdot g_n \,\mathrm{d}m, 0\right) = \left|\int_0^1 f \cdot g_n \,\mathrm{d}m - 0\right| = \left|\int_0^1 f \cdot g_n \,\mathrm{d}m\right| \le$$

$$\le \int_0^1 \underbrace{|f \cdot g_n|}_{=\|f \cdot g_n\|_1} \mathrm{d}m \overset{\text{Holder}}{\le} \Bigg\|\underbrace{f}_{<\infty}\Bigg\|_2 \cdot \|g_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\|g_n\|_2 = \left(\int_0^1 |g_n|^2 \,\mathrm{d}m\right) = \left(\int_0^1 n^2 \cdot I^2_{[0,n^{-3}]} \,\mathrm{d}m\right) =$$

$$= \left(\int_0^{n^{-3}} n^2 \,\mathrm{d}m(x)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(n^{-3} \cdot n^2\right)^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\|f\|_2 \cdot \|g_n\|_2 = \frac{\|f\|_2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כנדרש.

הערה: ע"פ התרגיל הקודם זה היה נכון גם אם $f \in L^{p>2}$

ב. ניקח לדוגמא נגדית $x^{-\frac{2}{3}} \in L^1([0,1])$. ($f$ אינטרגבילית לבג כי היא אינטרגבילית רימן בהחלט). נחשב:

$$\int_0^1 f(x)\, g_n(x)\, \mathrm{d}m(x) = \int_0^{n^{-3}} f(x) \cdot n \, \mathrm{d}m(x) =$$

$$= n \int_0^{n^{-3}} x^{-\frac{2}{3}}\, \mathrm{d}x = n \cdot \left. \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_{\cancel{x=0}}^{x=n^{-3}} = 3 \nrightarrow 0$$

תרגיל

יהיו $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ שני מרחבי בנך. ניתן למכפלה הקרטזית $X \times Y$ מבנה לינארי ע"י

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (x,y) &:= (\alpha x, \alpha y) \\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \|(x,y)\| &:= \|x\|_X + \|y\|_Y \end{aligned}$$

(הנורמה שהגדרנו היא באמת נורמה)

צריך להוכיח ש$(X \times Y, \|\cdot\|)$ הוא בנך.

פתרון

תהי $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב$X \times Y$, ויש להוכיח שיש לה גבול שם.

ביתר פירוט, לכל $\varepsilon > 0$ ישנו N כך שלכל $m, n \geq N$

$$\|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| < \varepsilon$$

ז.א.

$$\|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y < \varepsilon$$

מכאן שלכל $m, n \geq N$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

וגם

$$\|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

ז.א. $X \supseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו$Y \supseteq \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן קושי ומתכנסות(כי X, Y בנך) בהתאמה אל $\begin{matrix} x_n \to x_0 \in X \\ y_n \to y_0 \in Y \end{matrix}$. נטען כי $(x_0, y_0) \xrightarrow{n\to\infty} (x_n, y_n)$:

$$\|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| = \|(x_n - x_0, y_n - y_0)\| = \|x_n - x_0\|_X + \|y_n - y_0\|_Y \xrightarrow{n\to\infty} 0$$