תרגיל 4 - חשבון אינפי 3 תש"פ

תרגיל 1. תהי $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה ונניח שקיים $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל מסילה $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ שמקיימת

$$\lim_{t\to b}\gamma(t)=0$$

מתקיים

$$.\lim_{t\to b}f(\gamma(t))=L$$

הראו, ש $\lim_{x\to 0}f(x)=L$. (כלומר, אם על כל מסלול שלאורכו מתקרבים ל 0 מקבלים אותו גבול L אז ל f קיים גבול L).

פתרון. נניח, בשלילה, שהטענה אינה נכונה. אזי, קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $n>0$ קיים x עם $\|x\|<\frac{1}{n}$ כך ש $\|f(x)-f(0)\|\geq\varepsilon$. לכן, נוכל לבנות סדרה $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ כך ש $\|x_n\|<\frac{1}{n}$ ו $|f(x_n)-f(0)|\geq\varepsilon$. בנוסף, נשים לב, שכל כדור פתוח מנוקב (ז"א שהוציאו ממנו נקודה) הוא קבוצה קשירה מסילתית (כי כל שתי נקודות ניתן לחבר על ידי שני ישרים לכל היותר - עם הישר שמחבר אותן עובר דרך הנקודה שהוצאנו, ניקח נקדוה לא על הישר ונחבר את הנקודות אליה). ולכן, ניתן לחבר כל שתי נקודות עוקבות בסדרה, x_n ו x_{n+1} על ידי מסילה γ_n שתמונתה מוכלת ב $B\left(0,\frac{1}{n}\right)$ ותחום ההגדרה שלה הוא $\left[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1}\right]$. (בהינתן מסילה עם תחום הגדרה $[a,b]$ תמיד אפשר לבנות מסילה עם אותה תמונה על ידי מתיחה והזזה של הקטע). עכשיו נגדיר מסילה $\gamma:(0,1)\to\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$.\gamma(t)=\begin{cases}x_2 & t<\frac{1}{2}\\ \gamma_n(t) & 1-\frac{1}{n}\leq t\leq 1-\frac{1}{n+1},n\geq 2\end{cases}$$

קל לראות, ש γ מוגדרת היטב ורציפה, ז"א שהיא מסילה מ $(0,1)$ ל $\mathbb{R}^n$ ו $\lim_{t\to 1}\gamma(t)=0$. מצד שני, $\lim_{t\to 1}f(\gamma(t))\neq L$, כיוון ש

$$|f(x_n)-L|=\left|f\left(\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)-L\right|>\varepsilon$$

על פי הבניה, וקיבלנו סתירה להנחה.

תרגיל 2. האם הגבולות הבאים קיימים. במידה וכן, מצאו אותם.

.1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}y=y$$

(המעבר האחרון נכון מפני שאם $(x,y)\to 0$ אזי $xy\to 0$.)

.2

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}$$

כאן, הגבול לא קיים. אם נתקרב לאורך הישר $(0,0,z)$ נקבל שהגבול הוא 0. מצד שני אם נתקרב לאורך הישר $x=y=z$ נקבל

$$.\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^4} = \pm\infty$$

.3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נכפיל בצמוד ונקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = 0$$

.4

$$.\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

תרגיל 3. קבעו האם הפונצקיה f רציפה בנקודות a במקרים הבאים:

.1

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ב $a=(0,0)$.

פתרון. נראה ש $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = 0$. מספיק להראות ש $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right| = 0$. מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leq \lim_{x\to 0} \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \lim_{y\to 0} \left|\frac{y^4}{y^2}\right| = 0$$

הגבול של הפונקציה ב $(0,0)$ שווה לערך הפונקציה ב $(0,0)$ ולכן הפונקציה רציפה.

.2

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ln\left(x^2+y^2\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ב $a=(0,0)$.

פתרון. שוב - נבדוק האם גבול הפונקציה ב $(0,0)$ קיים ושווה לערך הפונקציה ב $(0,0)$.

נעבור לפולריות, ז"א $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ נציב ונקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln\left(x^2+y^2\right)=\lim_{r\to0} r^2\cos\theta\sin\theta\ln\left(r^2\right).$$

נשים לב, שאם $r\to0$ אזי $r^2\to0$ ותחילה נחשב את הגבול:

$$\lim_{t\to0} t\ln=\lim_{t\to0}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=0$$

על פי לופיטל. ולכן $\lim_{r\to0} r^2\cos\theta\sin\theta\ln\left(r^2\right)=0$, כפי שרצינו.

.3

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}-1}{\ln\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}} & (x,y)\neq(1,2)\\ 1 & (x,y)=(1,2)\end{cases}$$

ב $a=(1,2)$.

פתרון. נכפיל בצמוד ונקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}-1}{\ln\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}+1\right)\ln\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}}=$$

נבצע הצבה $x-1=r\cos\theta, y-2=r\sin\theta$. הגבול הופך ל

$$\lim_{r\to0}\frac{r^2}{\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)\ln\left(\sqrt{r^2+1}\right)}=$$

$$\lim_{r\to0}\frac{r^2}{\ln\left(r^2+1\right)}=\lim_{r\to0}\frac{2r}{\frac{2r}{r^2+1}}=1$$

והוא שווה לערך הפונקציה בנקודה.

.4

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^{2}}}y}{e^{-\frac{2}{x^{2}}}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

ב $a=\left(0,0\right)$.

פתרון. נציב $z=e^{-\frac{1}{x^{2}}}$. הגבול הופך ל

$$\lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}\frac{e^{-\frac{1}{x^{2}}}y}{e^{-\frac{2}{x^{2}}}+y^{2}}=\lim_{\left(z,y\right)\to\left(0,0\right),z>0}\frac{zy}{z^{2}+y^{2}}$$

וראינו שהגבול לא קיים. לכן לפונקציה אין גבול ב $\left(0,0\right)$ ולכן אינה רציפה ב $\left(0,0\right)$.

תרגיל 4. (סעיף ממבחן). תהי $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$. הראו שהשפה של E, ∂E היא קבוצת נקודות האי-רציפות של הפונקציה

$$\chi_{E}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}.$$

פתרון. תחילה, נשים לב, ש $a\in\partial E$ אם ורק אם קיימת סדרה $\left\{ x_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ של איברי E וגם סדרה $\left\{ y_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ שכמתכנסות ל a. באופן שקול,

$$\partial E=\overline{E}\bigcap\overline{E^{c}}=\left(intE^{c}\right)^{c}\cap\left(intE\right)^{c}.$$

במילים אחרות, a היא נקודת שפה אם ורק היא לא נקודה פנימית של E וגם של E^{c}. עכשיו, נראה ש a היא נקודת אי-רציפות אם ורק אם a היא נקודת שפה.

נניח ש a נקודת שפה. נניח ש $a\in E$. אזי קיימת סדרה $\left\{ a_{n}\right\}$ של איברים ב E^{c} שמתכנסת ל a. $\chi_{E}\left(a_{n}\right)=0$ לכל n, ו $\chi_{E}\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}\right)=1$ ולכן χ_{E} אינה רציפה ב a. באותו אופן, אם a היא נקודת שפה, ו $a\in E^{c}$, אזי קיימת סדרה $\left\{ a_{n}\right\}$ של איברים ב E שמתכנסת ל a. לכל n, $\chi_{E}\left(a_{n}\right)=0$ ו $\chi_{E}\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}\right)=1$ ולכן χ_{E} אינה רציפה ב a.
עכשיו, נניח ש χ_{E} אינה רציפה ב a. אזי קיימת סדרה של a_{n} ששואפת ל a ו

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{E}\left(a_{n}\right)\neq\chi_{E}\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}\right)=\chi_{E}\left(a\right)$$

מכיוון ש χ_{E} מקבלת שני ערכים בלבד, אפשר להניח ש $\chi_{E}\left(a_{n}\right)$ היא פונקציה קבועה, זאת אומרת מקבלת ערכים 0 ו 1 בלבד. אם $\chi_{E}\left(a_{n}\right)=1$ ו $\chi\left(a\right)=0$, ו $\lim_{n\to\infty}a_{n}=a$, אזי $a\in E$ וקיימת סדרה a_{n} ב E^{c} שמתכנסת ל a ואם $\chi_{E}\left(a\right)=0$ ו $\chi_{E}\left(a_{n}\right)=1$ אזי $a\in E^{c}$ וקיימת סדרה של איברי E שמתכנסת אליה. בשני המקרים, זה אומר ש $a\in\partial E$, כנדרש.

תרגיל 5. (ממבחן). הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם הסדרה $\left\{ a_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל a ב $\mathbb{R}^{n}$, אזי $\lim_{n\to\infty}\left\Vert a_{n}\right\Vert =\left\Vert a\right\Vert$.

פתרון. הוכחה: נניח ש a_n ל a מתכנסת. על פי אי-שוויון המשולש. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, מתקיים $\|a_n - a\| < \varepsilon$. מצד שני, על פי אי-שוויון המשולש, מתקיים:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| < \varepsilon$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|$ על פי ההגדרה.

2. אם הסדרה $\{\|a_n\|_{n=1}^{\infty}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}$, אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$.

פתרון. הפרכה: ניקח סדרה את הסדרה $a_n = (-1)^n$. הסדרה אינה מתכנסת, אבל $\|(-1)^n\| = 1$ הנא סדרה קבועה, ז"א מתכנסת.

3. אם הסדרה $\{\|a_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}$, אזי לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$.

פתרון. הוכחה: אם $\|a_n\|$ מתכנסת אזי היא חסומה ולכן $\{a_n\}$ חסומה. על פי משפט בולצנו-ויירשטראס ועל פי משפט בולצנו ויירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת.

תרגיל 6. (סעיף ממחבן). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ו $f : A \to \mathbb{R}^m$. נאמר, ש f מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים $M > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ מתקיים:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\| .$$

הוכיחו/הפריכו: אם f מקיימת את תנאי ליפשיץ אזי f רציפה.

פתרון. נראה שתנאי ליפשיץ גורר רציפות במ"ש ובפרט רציפות. יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. לכל x, y שמקיימים $\|x - y\| < \delta$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq M \|x - y\| \\ &< M\delta = M\frac{\delta}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

הפתרון לבונוס יעלה בהמשך.

תרגיל 7. (בונוס)

1. תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה, כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$, תהי x_0 נקודת הצטברות של D. נניח כי $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ כאשר x_0 היא נקודת הצטברות של כל D_i. הוכיחו שמתקיים

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

אם ורק אם לכל i מתקיים

$$\lim_{x\to x_0} f|_{D_i}(x) = L .$$

(רמז: כדאי להשתמש בקריטריון היינה לקיום גבול).

2. הראו שהטענה מהסעיף הקודם אינה נכונה אם לא דורשים שהאיחוד יהיה סופי.

תרגיל 8. (בונוס) תהי $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. הוכיחו שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ קיים, אם ורק אם לכל סדרה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל 0, סדרת הפונקציות

$$g_n(\theta) = f(r_n \cos\theta, r_n \sin\theta)$$

מתכנסת במידה שווה לפונקציה קבועה $g(\theta) = L$.