חקר ביצועים - הרצאה 1

3 בנובמבר 2011

פרטים

הציון יהיה 90% בחינה ו10% תרגיל או 95% בחינה ו5% תרגיל.
ספר:

- מודלים דטרמיניסטיים לחקר ביצועים (כרך א' בעיקר).

מייל:

magorir@math.biu.ac.il

חקר ביצועים

חקר ביצועים מסייע לנו למצוא פתרונות מינימום\מקסימום בהתאמה למגבלות הסביבה. כך שניתן להגדיר את חקב"צ כהפעלת שיטות וניתוח מדעי לבעיות מתחומים שונים (כלכלה, הנדסה וכו') על מנת לתת קרקע כמותית מוצקה לביצוע החלטות לנוכח התנאים בשטח.
השלבים שעלינו לעבור על מנת לפתור בעיה:

1. ניסוח הבעיה
2. בניית מודל מתמטי המתאר את המערכת
3. פתרון הבעיה
4. ניתוח רגישות

שלב 1 - ניסוח הבעיה

בניסוח הבעיה חשוב לזהות מי הם משתני ההחלטה ומהי המטרה הפתרון.

שלב 2 - בניית מודל מתמטי

בניית המודל המתמטי יהיה מהצורה הבאה:
פונק' מטרה:

$$\min \setminus \max \;\; z = ...$$

ומתחתיה יבואו האילוצים:

$$\text{Subject to..}$$

הערות

1. אנו למעשה נחפש מה הוא הx שיביא ל$\max\setminus\min$ את פונק' המטרה ויקיים את האילוצים.
2. נרצה לבצע ניתוח רגישות, כלומר לדעת עד כמה המודל שלנו רגיש לשינויים בסביבה, כלומר עד כמה הפתרון הינו רובסטי/יציב.

תכנון ליניארי - Linear Programming

דוגמה

לחברה יש קיבולת על 3 סוגי מכונות ייצור.
החברה מייצרת 3 סוגי מוצרים:

מכונה	זמן (שעות לשבוע)	זמן ייצור מוצר א'	זמן ייצור מוצר ב'	זמן ייצור מוצר ג'
א	200	8	2	3
ב	100	4	3	0
ג	50	2	0	1

הרווח ליחידה לכל מוצר הוא:

מוצר	רווח
מוצר א'	20 ש"ח
מוצר ב'	6 ש"ח
מוצר ג'	8 ש"ח

מוצר ג' מוכר כ-20 יחידות בשבוע.
עלינו למצוא את הייצור האופטימלי כדי שהרווח יהיה מקסימלי.

ננסח את הבעיה

<u>המטרה</u> - רווח מקסימלי.
<u>משתני ההחלטה:</u> כמה לייצר מכל מוצר (נסמן אותה בx_j = מס' יחידות מכל מוצר, $j = 1, 2, 3$).
פונק' המטרה תסומן בדר"כ בz.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ \text{Subject to} &: x_3 \le 20 \\ \text{Machine 1} & \quad 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 200 \\ \text{Machine 2} & \quad 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 \le 100 \\ \text{Machine 3} & \quad 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 50 \\ & \quad x_i \in \mathbb{Z},\, x_i \ge 0 \end{aligned}$$

הבעייתיות בדוגמה היא שx_1 מופיע בכל 3 המשוואות ולכן נרצה להשתמש במשתני החלטה מהצורה x_{ji} כאשר $i, j = 1, 2, 3$ כאשר i מסמן את מספר המכונה וj את המוצר. אזי:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 20\left(x_{11} + x_{12} + x_{13}\right) + 6\left(x_{21} + x_{22}\right) + 8\left(x_{31} + x_{33}\right) \\ \text{Subject to} &: x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 20 \\ \text{Machine 1} & \quad 8x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} \le 200 \\ \text{Machine 2} & \quad 4x_{12} + 3x_{22} \le 100 \\ \text{Machine 3} & \quad 2x_{13} + x_{33} \le 50 \\ & \quad x_{ji} \in \mathbb{Z},\, x_{ji} \ge 0 \end{aligned}$$

נחזור לניסוח הראשוני (הפחות מדוייק) של הבעיה, כי הבעייה המדויקת מסובכת:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ \text{Subject to} &: x_3 \le 20 \\ \text{Machine 1} & \quad 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 200 \\ \text{Machine 2} & \quad 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 \le 100 \\ \text{Machine 3} & \quad 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 50 \\ & \quad x_i \in \mathbb{Z},\, x_i \ge 0 \end{aligned}$$

נניח כי נייצר רק את x_1 (כי הוא מביא הכי הרבה ליחידה) אזי $x_1 = 25$ ואז $z = 500$.
אבל, אם נייצר כך:

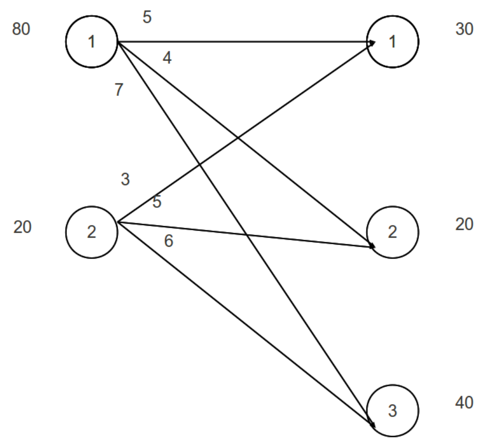
$$\begin{aligned} x_1 &= 24 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

אזי נקבל $z = 502$ וזה יותר טוב.
הפתרון הסופי שנקבל באמצעות הsimplex הוא:

$$\begin{aligned} x_1 &= 13.75 \\ x_2 &= 15 \\ x_3 &= 20 \end{aligned}$$

בעיית תובלה

יש שני בתי חרושת. בכל אחד יש מס' מסוים של מוצרים, אותם הם מספקים ל3 חנויות. בכל חנות יש דרישה מסוימת למוצרים, ולכל בית חרושת יש עלויות שונות למשלוח לכל חנות.



מטרה

יש להחליט כמה יחידות יש לשלוח לכל חנות בעלות מינימלית.

משתני החלטה

יש לנו 6 מוצרי החלטה: x_{ij} כאשר $j = 1, 2, 3$ ו$i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \min\ z &= 5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} \\ \text{s.t} &: \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 80 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 20 \\ x_{11} + x_{21} &= 30 \\ x_{12} + x_{22} &= 20 \\ x_{13} + x_{23} &= 40 \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$