<u>פיתרון מבחן 2007 מועד א</u>

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן.

1) מספר תת-החבורות p-סילו של חבורה סופית G מחלק את $|G|$.

<u>פיתרון:</u>

תהי H תת-חבורה p-סילו של G (קיימת לפי משפט סילו 1).

ניזכר בהגדרה של הנורמליזטור של H ב G:

$N = N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$.

תת-טענה:

מספר תת-החבורות הסילו של H שווה לאינדקס של N ב G.

תת-הוכחה:

לפי משפט סילו השני, קבוצת תת-חבורות ה p-סילו של G היא קבוצת החבורות הצמודות ל H ב G. נבנה העתקה בין קבוצת המחלקות השמאליות של הנורמליזטור של H ב G לבין קבוצת החבורות הצמודות ל H $\varphi : \{gN : g \in G\} \to \{gHg^{-1} : g \in G\}$ המקיימת

$\varphi(g) = gHg^{-1}$ (*שימו לב שזהו אינו הומומורפיזם*).

פונקצייה זו היא מוגדרת היטב וחח"ע משום

ש $aN = bN \Leftrightarrow a^{-1}b \in N \Leftrightarrow H = a^{-1}bHb^{-1}a \Leftrightarrow aHa^{-1} = bHb^{-1}$.

המקור של כל gHg^{-1} הוא g ולכן זו גם פונקצייה על. מש"ל.

לפי התת-טענה, $r_p = [G : N]$ ולכן $r_p \mid |G|$.

2) תהי G חבורה אבלית סופית. הוכח כי אם p ראשוני המחלק את $|G|$ אז קיים איבר מסדר p ב G (*זהו משפט קושי לחבורות אבליות*) .

<u>פיתרון:</u>

נבחר איבר שונה מאיבר היחידה $g_1 \in G$. אם הסדר שלו לא מתחלק ב p אז נביט ב $G_1 = G/<g_1>$ ($<g_1>$ היא תת"נ של G, כיוון ש G אבלית).

שוב, נבחר איבר שונה מאיבר היחידה (אם יש) $g_2 \in G_1$. אם הסדר שלו לא מתחלק ב p אז נביט ב $G_2 = G_1/<g_2>$.

מכיוון שהחבורה קטנה בכל שלב (לפי משפט לגרנג' $\left(|G_i| = |G_{i-1}/<g_i>| = [G_{i-1} :< g_i >] = \frac{|G_{i-1}|}{|<g_i>|} < |G_{i-1}|\right)$, והיא סופית, אז אם לא נבחר באף שלב איבר שהסדר שלו מתחלק ב p אז התהליך יעצר מתישהו כאשר $G_n = \{e\}$.

כעת,

$$|G| = |<g_1>| \cdot |G_1| = o(g_1) \cdot |<g_2>| \cdot |G_2| = \ldots = o(g_1)o(g_2)\ldots o(g_{n-1})\,|G_n|$$
$$= o(g_1)o(g_2)\ldots o(g_{n-1})$$

מכיוון שאף איבר במכפלה אינו מתחלק ב p גם $|G|$ לא מתחלק ב p , וזו סתירה.

לכן באחד השלבים נקבל $g_k \in G_{k-1}$ כך שהסדר שלו מתחלק ב p .

תת-טענה 1: לכל $1 \le i \le n$ מתקיים G_i היא מנה של G, כלומר קיימת $H_i \lhd G$ כך ש $G/H_i \cong G_i$.

תת-הוכחה: מוכיחים באינדוקציה על i. עבור i=1 הגדרנו $G_1 = G/<g_1>$, ולכן היא מנה של G.

נניח שהטענה מתקיימת עבור 1,...,i-1, ואז נראה עבור i. לפי ההנחה קיימת $H \lhd G$ כך ש $G_{i-1} = G/H$. בנוסף $G_i = G_{i-1}/<g_i>$.

לפי $G_{i-1} = G/H$ קיים $\tilde{g}_i \in G$ כך ש $\tilde{g}_i H = g_i$. נגדיר $K = <\tilde{g}_i> H \lhd G$. אזי נראה ש $G/K \cong G_i$.

לפי משפט איזו' 3: $G/K \cong (G/H)/(K/H)$

בנוסף $K/H = <\tilde{g}_i H> = <g_i>$, ולכן בדיוק נקבל

$G/K \cong (G/H)/(K/H) \cong G_{i-1}/<g_i> = G_i$.

לפי התת-טענה $G_{k-1} \cong G/H_{k-1}$. לכן קיים $\tilde{g}_k \in G$ כך ש $\tilde{g}_k H_{k-1} = g_k$.

תת-טענה 2: $o(g_k) \mid o(\tilde{g}_k)$

תת-הוכחה: $g_k^{o(\tilde{g}_k)} = (\tilde{g}_k H_{k-1})^{o(\tilde{g}_k)} = (\tilde{g}_k^{o(\tilde{g}_k)}) H_{k-1} = eH_{k-1} = H_{k-1}$.

לכן $\tilde{g}_k$ הוא מסדר dp לאיזשהו d, ואזי

תת-טענה 3: $o(\tilde{g}_k^{\ d}) = p$.

תת-הוכחה: $\left(\tilde{g}_k^{\ d}\right)^p = \tilde{g}_k^{\ dp} = e$, ולכן $o(\tilde{g}_k^{\ d}) \mid p$ ולכן $o(\tilde{g}_k^{\ d}) \in \{1, p\}$ אבל $o(\tilde{g}_k^{\ d}) \neq 1$ (כי אז $\tilde{g}_k^{\ d} = e$ בסתירה לכך ש $\tilde{g}_k$ הוא מסדר dp).

3) תהיינה $A, B \lhd G$ כך ש $A \cap B = \{e\}$. הוכח כי $AB = A \times B$.

<u>פיתרון:</u>

נבנה פונקציה $\varphi : A \times B \to AB$ ונוכיח שהיא איזומורפיזם.

נגדיר $\varphi(a,b) = ab \in AB$ לכל $(a,b) \in A \times B$. כדי להוכיח ש φ הומ' צריך להוכיח $\varphi[(a,b)*(c,d)] = \varphi[(a,b)]\varphi[(c,d)]$ לכל $(a,b),(c,d) \in A \times B$. אבל $\varphi[(a,b)]\varphi[(c,d)] = abcd$ וגם $\varphi[(a,b)*(c,d)] = \varphi[(ac,bd)] = acbd$.

לכן צריך להוכיח ש $acbd = abcd$ לכל $(a,b),(c,d) \in A \times B$.

מספיק אם כך להוכיח זה שהאיברים של A מתחלפים עם האיברים של B, כי אז

$acbd = abcd$ (כי $c\in A, b\in B$ מתחלפים) לכל $(a,b),(c,d)\in A\times B$.

תת-טענה: מתקיים שהאיברים שלA מתחלפים עם האיברים של B

תת-הוכחה: יהיו $a\in A$ ו$b\in B$. נביט בקומוטטור $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$.
מצד אחד, $aba^{-1}\in B$ (כי B נורמלית) ולכן $[a,b]\in B$. מצד שני (מסיבה דומה) $[a,b]\in A$, אך $A\cap B=\{e\}$ ולכן $[a,b]=e$. משמע, האיברים של A מתחלפים עם האיברים של B.

נשאר להוכיח φ חח"ע ועל.

φ על כי לכל $ab\in AB$ מתקיים $\varphi(a,b)=ab$.

נניח בשלילה כי φ אינה חח"ע. לפי משפט φ חח"ע אם ורק אם $Ker\varphi=\{e\}$.

אז קיים $(a_0,b_0)\neq(e,e)$ כך ש $a_0b_0=\varphi(a_0,b_0)=e$ אז $a_0=b_0^{-1}$. כיוון ש $(a_0,b_0)\neq(e,e)$ נקבל שמתקיים $a_0\neq e$ או $b_0\neq e$, ולכן לפי $a_0=b_0^{-1}$ נקבל שבהכרח $a_0\neq e$.

ולכן $e\neq a_0\in A\cap B$ וזו סתירה. משמע, הוא יהיה חח"ע.

4) החבורה S_4 פועלת על הפולינומים בארבעה משתנים $F[x_1,x_2,x_3,x_4]$ באופן הבא: $\sigma(f(x_1,x_2,x_3,x_4))=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)})$ לכל $\sigma\in S_4$. מצאו את סדר המסלול והמייצב של הפולינום $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2$.

<u>פיתרון:</u>

המסלול הוא $\theta(x_1x_2)=\{x_1x_2,x_1x_3,x_1x_4,x_2x_3,x_2x_4,x_3x_4\}$.

זאת כיוון שמתקיים $\pi(x_1x_2)=x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}$, וכיוון ש π תמורה נקבל $\pi(1)\neq\pi(2)$, ולכן $\pi(x_1x_2)\in\{x_1x_2,...,x_3x_4\}$. בנוסף לכל x_ix_j כך ש $i\neq j$ נקח $\pi=(1\ i)(2\ j)$ ונקבל $\pi(x_1x_2)=x_ix_j$.

משמע, הגודל של המסלול הוא 6. ידוע כי הגודל של המייצב הוא הגודל של החבורה הפועלת חלקי גודל המסלול, ובמקרה הזה מקבלים $4=\dfrac{24}{6}$.

[אפשר גם בכוון ההפוך: התמורות שמשאירות את הפולינום x_1x_2 כמות שהוא הן $\{id,(3\quad 4),(1\quad 2)(3\quad 4),(1\quad 2)\}$ (אם אתם פותרים כך יש להסביר מדוע אילו היחידות) ואז הגודל שלו הוא 4...]

5) מיין את החבורות מסדר 121 עד כדי איזומורפיזם.

פיתרון: תהי G חבורה מסדר 121.

ניעזר במשפט הבא:

משפט: חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

הוכחה א':

ידוע כי $|G|=|Z_G|+\sum|conj(x)|$ כאשר ה-x-ים הם נציגי מחלקות צמידות המכילות יותר מאיבר אחד. לפי **משפט** שלמדנו בכיתה, לכל x מתקיים $|conj(x)|=[G:St(x)]$ ולכן $|conj(x)|\,|\,|G|$ (לפי משפט לגרנג').

לכן $|conj(x)|\in\{1,p,p^2\}$. עבור מחלקות הצמידות שמכילות יותר מאיבר אחד, הגודל לא יכול להיות 1, אך הוא גם לא יכול להיות p^2

(משום שזה מספר האיברים בחבורה, ולפחות איבר היחידה מהווה מחלקת צמידות עצמאית), ולכן מספר האיברים בהן הוא p. כלומר

$|conj(x)|=p$ לכל $x\notin Z(G)$.

הגודל של המרכז צריך להתחלק ב p כיוון ש

$|Z_G|=|G|-\sum|conj(x)|$ כי p מחלק את צד שמאל, ולכן מחלק את צד ימין (שימו לב שזאת ההוכחה שהמרכז של חבורת p אינו טריויאלי).

כיוון ש Z_G מכיל לפחות איבר אחד אזי $|Z_G|\geq p$. כלומר

$Z(G)\in\{p,p^2\}$.

נניח בשלילה כי החבורה איננה אבלית. אזי קיים x שאינו במרכז. גודל מחלקת הצמידות שהוא מייצג הוא p ולכן גודל המרכז שלו Z_x הוא p (זאת כיוון שלפי משפט $[G:Z_x]=|conj(x)|$). אולם, במרכז Z_x ישנם לפחות p איברים של Z_G, והמרכז Z_x מכיל איברים נוספים, כגון x (שלא נמצאים במרכז Z_G), ולכן יש ב Z_x יותר מ p איברים, וזו סתירה.

(דרך אחרת היא להשתמש במשפט שאומר ש G/Z(G) אינה יכולה להיות ציקלית לא טריויאלית, ולכן זאת סתירה לכך שגודל Z(G) הוא p. אם עליכם להוכיח כי חבורה מסדר p^2 היא אבלית במבחן, עליכם לוודא עם המרצה האם מותר להשתמש במשפט זה בלי להוכיח אותו).

כעת קיבלנו שהחבורה מסדר $121=11^2$ היא אבלית.

לפי משפט היסודי של חבורות אבליות סופיות, אנחנו יודעים שכל חבורה מתפרקת למכפלה ישרה של חבורות p-ציקליות, ולכן האפשרויות היחידות הן $\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11},\mathbb{Z}_{121}$ (עד כדי איזו').

דרך אחרת: כל איבר שונה מאיבר היחידה הוא מסדר 11 או 121, כי סדר איבר מחלק את סדר החבורה. אם קיים איבר מסדר 121 אז החבורה היא ציקלית ולכן איזו' ל $\mathbb{Z}_{121}$. אחרת: כל האיברים ששונים מאיבר היחידה הם מסדר 11. יהי x איבר מסדר 11, אזי $<x>$ היא מסדר 11, ולכן קיים איבר y השייך ל $G-<x>$ (וגם הוא מסדר 11). כיוון שהחבורות $<x>$ ו $<y>$ שונות (y לא נמצא ב $<x>$) $<x>\cap<y>=\{e\}$ (כיוון ש $<x>\cap<y>$ היא תת-חבורה של $<y>$ ולפי לגרנג' סידרה מחלק את 11, אך $<x>\cap<y>\neq<y>$ כי y לא נמצא ב $<x>$). כעת $|<x><y>|=\frac{|<x>||<y>|}{|<x>\cap<y>|}=|<x>||<y>|=121\Rightarrow<x><y>=G$. כעת כיוון שהחבורה אבלית, מתקיימים תנאי שאלה 3: $<x><y>=G$, $<x>,<y>\lhd G$, $<x>\cap<y>=\{e\}$. ולכן $G=<x><y>\cong<x>\times<y>\cong\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11}$.

6) הוכח או הפרך כי כל חבורה מהסדר r היא חבורה פשוטה כאשר

a. $r=6$.

b. $r=7$.

c. $r=8$.

פיתרון:

עבור $r=6$ זה לא נכון. למשל, $\mathbb{Z}_6$ אינה פשוטה.

[הערה: כל חבורה מסדר $2p$ היא אינה פשוטה. זאת משום שקיים איבר מסדר p בחבורה, ותת-החבורה שהוא יוצר היא מאינדקס 2, ולכן נורמלית].

עבור $r=7$, זה נכון, משום שכל תת-חבורה שלה היא מסדר המחלק את 7, ולכן היא מגודל 7 (כל החבורה) או 1, אז אין לה כלל תת-חבורות לא טריוויאליות, בפרט נורמליות.

עבור $r=8$ זה לא נכון. למשל $\mathbb{Z}_8$ אינה פשוטה.

[הערה: כל חבורה מסדר 8 אינה פשוטה. הוכחה: אם כל האיברים בה הם מסדר 2 אז היא אבלית ואז כל תת-חבורה שלה היא נורמלית ואפשר פשוט לקחת תת-חבורה שאחד מהאיברים יוצר. בפרט במקרה זה היא איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (לוקחים 3 איברים מסדר 2 ומראים שהת"ח שהם יוצרים מקיימות את תנאי *משפט המכפלה הפנימית*). אם יש איבר מסדר 4 אז הוא יוצר תת-חבורה מאינדקס 2 ולכן נורמלית. אם יש איבר מסדר 8 אז החבורה היא ציקלית ואיזומורפית ל $\mathbb{Z}_8$.]

7) הוכח או הפרך:

a. S_4 פתירה.

b. S_6 פתירה.

<u>הוכחה:</u>

א. S_4 היא אכן פתירה, משום שאפשר להביט בסדרה

$\{id\}\lhd\langle(1\ \ 2)(3\ \ 4)\rangle\lhd K\lhd A_4\lhd S_4$ כאשר

$K=\{id,(1\ \ 2)(3\ \ 4),(1\ \ 3)(2\ \ 4),(1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$.

החבורה K היא תת-חבורה נורמלית של S_4 (ולכן גם של A_4) משום שהצמדה לא משנה את מבנה המחזורים של תמורה, ולכל תמורה ב K מופיעות גם כל שאר התמורות עם אותו מבנה המחזורים.

כל הגורמים הם אבליים $(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$ ולכן החבורה פתירה.

ב. S_6 היא לא פתירה:

כידוע $G'\triangleleft G$ [=תת-החבורה שנוצרת ע"י כל הקומוטטורים], לכל חבורה G. לכן $A_6'\triangleleft A_6$

לפי משפט A_n היא חבורה פשוטה לכל $n\geq 5$.

לכן $A_6'=\{e\}$ או $A_6'=A_6$. אבל לפי משפט לכל חבורה G מתקיים $G'=\{e\}$ אם ורק אם G אבלית. A_6 אינה אבלית (לדוגמא $(123)(234)\neq(234)(123)$),

לכן בהכרח $A_6'=A_6$. מכאן ניתן לראות ש $A_6^{(k)}=A_6$ לכל $k\geq 1$.

נראה ש $S_6'=A_6$:

כיוון שכל קומוטטור $[\pi,\sigma]=\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$ הוא בהכרח תמורה זוגית:

$$\begin{aligned}sign(\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1})&=sign(\pi)sign(\sigma)sign(\pi)^{-1}sign(\sigma)^{-1}\\&=sign(\pi)sign(\pi)^{-1}sign(\sigma)sign(\sigma)^{-1}=1\end{aligned}$$

(הסימן הוא הומ' לתוך חבורה אבלית, ולכן ניתן להוציא את ההפכי ולהחליף בסדרי האיברים).

לכן $S_6'\leq A_6$ אבל כבר אמרנו ש $S_6'\triangleleft S_6$ ולפי משפט התח"נ הלא טריויאלית היחידה של S_6 היא A_6, וכיוון ש $S_6'\neq\{e\}$ כי היא אינה אבלית, נקבל שבהכרח $S_6'=A_6$.

לכן $S_6^{(k)}=A_6\neq\{e\}$ לכל $k\geq 1$.

בעוד שיש משפט האומר כי חבורה G היא פתירה אם ורק אם קיים t סופי כך ש $G^{(t)}=\{e\}$. לכן S_6 אינה פתירה.