תרגיל 3 – אנליזה מודרנית

היום נדבר על קבוצת קנטור. קבוצת קנטור חשובה בקורס זה משתי סיבות:

א. היא דוגמא לקבוצה לא בת מניה שהמידת לבג שלה היא 0.
ב. היא קשורה לפונקצית קנטור אותה נצטרך בהמשך.

הגדרה: נסמן $C_0=[0,1]$, ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר שמורידים מכל קטע בו את השליש האמצעי (הפתוח) ע"י הנוסחה $C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$. קבוצת קנטור מוגדרת כחיתוך של כל ה- C_n : $C:=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$. (כל C_n הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים שאורכם $\frac{1}{3^n}$.

[לצייר ציור!]

תכונות:

א. C קומפקטית.

ב. יהי $x\in[0,1]$, אם נציג את x בבסיס טרנארי (3) $x=0.x_1x_2x_3...$ (כלומר $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$) אזי נקבל כי $x\in C \Leftrightarrow$ לכל $n\in\mathbb{N}$, הספרה ה-nית של x $x_n\equiv d_n(x)\equiv x$ היא 0 או 2.

ג. C אינה בת-מנייה.

ד. $m(C)=0$

ה. C לא מכילה שום קטע (בעל מידה חיובית)

ו. C אינה איחוד בן-מנייה של קטעים סגורים.

הוכחה:

א. מכיוון ש C_n הינה איחוד סופי של קטעים סגורים נקבל כי C_n קבוצה סגורה לכל $n\in\mathbb{N}$.
מכאן שקבוצת קנטור $C:=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$ הינה סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות. מכיוון ש $C\subset[0,1]$ אזי היא חסומה ועפ"י היינה בורל הינה קומפקטית.

ב. נוכיח $x\in C_n \Leftrightarrow x_1,x_2,...,x_n\in\{0,2\}$ באינדוקציה:

המקרה $n=1$:

$$x \in C_1 \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ or } x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 \in \{0,2\}$$

נניח את נכונות הטענה עבור n כלשהו ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$:

$(\Rightarrow)$

$$x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x \in \frac{C_n}{3} \text{ or } x \in \left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 3x \in C_n \text{ or } 3x-2 \in C_n$$

ע"פ הנחת האינדוקציה, $d_n(3x) \in \{0,2\}$ או $d_n(3x-2) \in \{0,2\}$. אבל - או ש $d_n(3x) = d_{n+1}(x) = x_{n+1}$ או ש $d_n(3x-2) = d_{n+1}(x) = x_{n+1}$. מספיק לשים לב כי $C_{n+1} \subseteq C_n$ כדי לראות שהטענה נכונה.

$(\Leftarrow)$

ידוע כי $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in \{0,2\}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה $x \in C_n$. יש להוכיח כי $x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x \in C_n$ או $3x-2 \in C_n$. ובכן:

אם $x_1 = 0$ נקבל $3x = 0.x_2x_3...x_nx_{n+1}... \in C_n$,

ואם $x_1 = 2$ נקבל $3x-2 = 0.x_2x_3...x_nx_{n+1}... \in C_n$.

סיימנו את האינדוקציה. סה"כ $x \in C \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}(x \in C_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}(x_n \in \{0,2\})$

מש"ל.

ג. נניח בשלילה כי C בת-מנייה. אזי $C = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שלכל x_n יש פיתוח טרנארי כנ"ל:

$x_1 = 0.x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}...$

$x_2 = 0.x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}...$

.

.

.

$x_i = 0.x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}...$

כאשר לכל i, j $x_j^{(i)} \in \{0,2\}$.

נגדיר מספר חדש $y = 0.y_1 y_2 y_3... \in C$ ע"י $y_i = \begin{cases} 2 & x_i^{(i)} = 0 \\ 0 & x_i^{(i)} = 2 \end{cases}$. קל לראות שהמספר הזה לא מופיע ברשימה הוא שונה מכל איבר בספרה מסוימת. קיבלנו סתירה, ולכן C איננה בת-מנייה.

הערה: אמנם ייצוג טרינארי אינו יחיד, אבל במקרה שלנו זה לא פוגע בהוכחה.

ד. לכל $N \in \mathbb{N}$, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C_N$ וע"פ מונוטוניות $0 \le m(C) \le m(C_N) = 2^N \frac{1}{3^N}$. נשאיף $N \to \infty$ לקבל את הדרוש.

ה. נניח בשלילה שקיים קטע $I \subseteq C$, עם מידה (אורך) $m(I) = \ell > 0$. עפ"י המונוטוניות נקבל בסתירה ש

$$m(I) \le m(C) = 0$$

ו. נניח בשלילה כי $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר I_n קטעים סגורים. אזי כבר ראינו כי $m(I_n) = 0$ ולכן בהכרח $I_n = \{x_n\}$, כלומר הקטעים הסגורים הינם נקודונים. אבל עפ"י סעיף ג' C איננה בת מנייה ומכאן סתירה.

בטופולוגיה, קבוצה A תקרא דלילה (nowhere dense set) אם $Int(Cl(A)) = \varnothing$. במילים, A תקרא דלילה אם הפנים של הסגור של A הינה קבוצה ריקה. ראינו כי קבוצת קנטור הינה דלילה. כמו כן ברור כי אם קבוצה הינה בעלת מידה מידה 0 אזי היא בודאי דלילה. האם הכיוון ההפוך נכון גם כן? האם קבוצה דלילה היא בהכרח בעלת מידה 0?

נבנה דוגמה נגדית. תהי $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים כך ש $0 < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} c_k < 1$ בדומה לאופן בו בנינו את קבוצת קנטור C , נוריד ממרכז הקטע $[0,1]$ קטע באורך c_1 על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_1$. כעת נוריד ממרכז כל אחד משני הקטעים שנשארו קטעים באורך c_2 על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_2$. בשלב ה k נוריד 2^{k-1} קטעים

ממרכז כל אחד מהקטעים שנשארו מהשלב ה $k-1$ על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_k$. נגדיר את $\widehat{C}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\widehat{C}_k$ להיות קבוצת קנטור המוכללת.

א. הראו כי $\widehat{C}$ קבוצת קנטור המוכללת הינה קומפקטית ומושלמת(קבוצה של נקודה בה הינה נקודת הצטברות של הקבוצה).

ב. הראו כי $\widehat{C}$ הינה דלילה.

ג. הראו כי $m\left(\widehat{C}\right)=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k$.

פתרון:

א. מכיוון שהקבוצה $\widehat{C}_k$ הינה איחוד סופי של קבוצות סגורות היא סגורה. $\widehat{C}$ סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות . ברור כי $\widehat{C}$ חסומה ולכן קומפקטית. את העובדה כי הקבוצה מושלמת תראו בתרגיל הבית.

ב. על מנת להראות כי $\widehat{C}$ הינה דלילה נראה כי היא איננה מכילה אף קטע פתוח. נראה זאת ע"י בניית סדרה הנמצאת במשלים של $\widehat{C}$ המתכנסת לאיבר שרירותי ב $\widehat{C}$.

יהי $x\in\widehat{C}$, נבנה את הסדרה $\{x_n\}$ באופן הבא. אם $x\in A_k^m$ ניקח את x_k להיות מרכז הקטע I_k אותו אנו מורידים בשלב ה k . ברור כי $x_k\in\widehat{C}^c$. נשים לב כי

$$\left|x_k-x\right|\le\frac{\left|I_k\right|}{2}+\left|A_{k+1}{}^m\right|=\frac{c_{k+1}}{2}+\left|A_{k+1}{}^m\right|\to 0$$

מכאן כי $\widehat{C}$ דלילה.

ג. בשלב ה k אנו מורידים 2^{k-1} קטעים באורך c_k כל אחד. מכאן ש

ד. $m\left(\widehat{C}\right)=\lim_{k\to\infty}m\left(\widehat{C}_k\right)=m\left([0,1]\right)-\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}c_i=1-\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}c_i\to1-\sum_{i=1}^{\infty}2^{i-1}c_i>0$. כאשר השיוויון תקף מרציפות המידה.