הנדסה מד"ר תשעח מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = y + \frac{1}{x}(1-y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

פתרון: נסדר

$$y' = y + \frac{1}{x}(1-y)$$

$$y' = y\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$$

$$y' + y\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$$

וקיבלנו מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = \frac{1}{x} - 1, b(x) = \frac{1}{x}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. למשל נבחר $A(x) = \ln(x) - x$ (בלי ערך מוחלט כי מחפשים פתרון סביב $x = 1$ שהוא חיובי) ואז

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x-\ln(x)}\left(C + \int \frac{1}{x}e^{\ln(x)-x}\mathrm{dx}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}\left(C + \int \frac{1}{x}xe^{-x}\mathrm{dx}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}\left(C - e^{-x}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}C - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה.

$$2 = y(1) = e \cdot C - 1$$

לכן $C=\frac{3}{e}$. התשובה הסופית היא

$$.y(x)=\frac{3}{e}\cdot\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\frac{x^2+e^x}{2x+e^x}y'=-y$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$.

פתרון: נסדר

$$\frac{x^2+e^x}{2x+e^x}y'=-y$$

$$\frac{y'}{-y}=\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{-y}=\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו.

$$-\ln|y|=\int\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\mathrm{dx}=\ln\left(x^2+e^x\right)+C$$

ולכן $\frac{1}{|y|}=\left(x^2+e^x\right)e^C$ ולכן $|y|=\frac{1}{(x^2+e^x)e^C}$ ולכן

$$.y=\pm\frac{1}{(x^2+e^x)\,e^C}$$

נציב תנאי התחלה

$$1=y(0)=\pm\frac{1}{e^C}$$

ונגלה שצריך לקחת את הפתרון עם הפלוס. ומכאן ש $\frac{1}{e^C}=1$ ולכן $C=0$. סה"כ הפתרון לתרגיל

$$.y=\frac{1}{x^2+e^x}$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''=2x\left(y'\right)^2$ המקיים $y(0)=0,y'(0)=-1$.

פתרון: נציב $z = y'$ ונסדר

$$z' = 2xz^2$$

$$\frac{z'}{z^2} = 2x$$

$$\frac{\mathrm{dz}}{z^2} = 2x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו.

$$-\frac{1}{z} = x^2 + C$$

ולכן $y' = z = -\frac{1}{x^2+C}$. נציב תנאי התחלה

$$-1 = y'(0) = -\frac{1}{C}$$

מכאן ש $C = 1$ ונקבל ש

$$y' = -\frac{1}{x^2+1}.$$

לכן

$$y = \int z = -\arctan(x) + D$$

ונציב את תנאי ההתחלה השני

$$0 = y(0) = D$$

לכן התשובה הסופית היא

$$y(x) = -\arctan(x).$$

4. מצאו פתרון למד"ר $y'' = y + e^x$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

פתרון: זה המד"ר

$$y'' - y = e^x$$

ונתחיל עם המד"ר ההומגנית המתאימה $y'' - y = 0$. הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

ולכן e^x, e^{-x} פתרונות למד"ר ההומגנית. כיוון שזוהי מד"ר מסדר שני, הם מהווים בסיס למרחב הפתרונות שלה. לכן הפתרון הכללי להומגנית הוא

$$y_h = d_1 e^{-x} + d_2 e^x$$

וכעת נמצא פתרון פרטי y_p למד"ר הלא הומגנית ואז הפתרון הכללי ללא הומגנית יהיה $y = y_p + y_h$. כיוון שמשווים ל e^x ו 1 הוא שורש של הפולינום האופיני של ההומגנית, ננחש פתרון $y_p = \alpha x e^x$. ואז

$$y_p' = \alpha (x+1) e^x$$
$$y_p'' = \alpha (x+2) e^x$$

ונציב ב $y'' - y = e^x$.

$$y'' - y = e^x$$

$$\alpha (x+2) e^x - \alpha x e^x = e^x$$

נצמצם e^x לקבל $\alpha (x+2) - \alpha x = 1$ לכן $2\alpha = 1$ ו $\alpha = \frac{1}{2}$. לכן

$$y_p = \frac{1}{2} x e^x$$

פתרון פרטי ללא הומגנית והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{2} x e^x + d_1 e^{-x} + d_2 e^x$$

והנגזרת

$$y' = \frac{1}{2}(x+1) e^x - d_1 e^{-x} + d_2 e^x$$

ונציב את הנתונים $y(0)=0, y'(0)=0$ למצוא את הקבועים:

$$0=y(0)=d_1+d_2$$
$$0=y'(0)=\frac{1}{2}-d_1+d_2$$

מהמשוואה הראשונה $d_1=-d_2$ ואז נציב במשוואה השניה לקבל $0=\frac{1}{2}+d_2+d_2$ ואז $d_2=-\frac{1}{4}$. מכאן ש $d_1=-d_2=\frac{1}{4}$ והפתרון לתרגיל שלנו הוא

$$.y=\frac{1}{2}xe^x+\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{4}e^x$$

5. ידוע כי קיים פתרון למד"ר $x^2y''=\left(x^2-2x+2\right)y+x-2$ מהצורה $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. עבור פתרון זה:

(א) מצאו את $y(0), y'(0)$.

פתרון: נציג את המד"ר כ

$$x^2y''-\left(x^2-2x+2\right)y=x-2$$

ונסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1}, \qquad y''=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$x^2y''-\left(x^2-2x+2\right)y=x^2y''-x^2y+2xy-2y$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}2a_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}2a_kx^k=$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^k-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}2a_{k-1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}2a_kx^k=$$

$$= (2a_0x - 2a_0 - 2a_1x) + \sum_{k=2}^{\infty} [a_k k (k-1) - a_{k-2} + 2a_{k-1} - 2a_k] x^k$$

ומשווים ל $x - 2$. לכן

$$2a_0 - 2a_1 = 1 \qquad -2a_0 = -2$$

לכן $a_0 = 1$ ו $a_1 = \frac{2a_0-1}{2} = \frac{1}{2}$) ולכל $k \geq 2$ מתקיים

$$a_k k (k-1) - a_{k-2} + 2a_{k-1} - 2a_k = 0$$

$$a_k [k(k-1) - 2] = a_{k-2} - 2a_{k-1}$$

ולכן מצאנו את הפתרון כיוון ש $y(0) = a_0 = 1$ ו $y'(0) = a_1 = \frac{1}{2}$.

נתון בנוסף כי $y''(0) = \frac{1}{3}$:

(ב) מצאו את y.

פתרון: ראינו כי $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מקיים: $a_0 = 1$ ו $a_1 = \frac{1}{2}$ ולכל $k \geq 2$ מתקיים

$$a_k [k(k-1) - 2] = a_{k-2} - 2a_{k-1}$$

וכעת נתון ש $2a_2 = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) 0^{k-2} = y''(0)$ שווה ל $\frac{1}{3}$ לכן $a_2 = \frac{1}{3!}$. נמשיך להציב kים: עבור $k = 2$ נקבל $a_2 \cdot 0 = 0$. לכל $k \geq 3$ נקבל ש

$$a_k \left[k^2 - k - 2\right] = a_{k-2} - 2a_{k-1}$$

$$a_k [(k+1)(k-2)] = a_{k-2} - 2a_{k-1}$$

$$a_k = \frac{a_{k-2} - 2a_{k-1}}{(k+1)(k-2)}$$

ונמשיך להציב $k \geq 3$:

$$a_3 = \frac{a_1 - 2a_2}{4 \cdot 1} = \frac{\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3!}}{4} = \frac{\frac{3-2}{3!}}{4} = \frac{1}{4!}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{3!} - 2\frac{1}{4!}}{5 \cdot 2} = \frac{\frac{2}{4!}}{5 \cdot 2} = \frac{1}{5!}$$

ואפשר להוכיח כי לכל k מתקיים

$$a_k = \frac{1}{(k+1)!}$$

ולכן

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(e^x - 1 \right)$$

(ג) הביעו את y במפורש באמצעות פונקציות סטנדרטיות.

פתרון: כמו שסיימנו את הסעיף הקודם $y(x) = \frac{1}{x} \left(e^x - 1 \right)$.