ω מדוייקת $\Leftrightarrow \int_\Gamma \omega = 0$ לכל Γ סגור.

הגדרה

יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח 2-ממדי $n \geq 2$.
נאמר שM תחום פשוט קשר אם M קבוצה קשירה, ולכל עקום סגור $\Gamma \subset M$ התחום פנימי ביחס לΓ של M.

למה(פואנקרה)

יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח 2-ממדי פשוט קשר. אזי כל תבנית סגורה על M היא תבנית מדוייקת.

הוכחה

Γ סגור, $\mathrm{int}\Gamma$. נגדיר $K = \mathrm{int}\Gamma \cup \Gamma \Leftarrow \partial K = \Gamma$

משפט סטוקס

$$\int_{\Gamma = \partial K} = \int_K \mathrm{d}\omega = 0$$

דוגמה

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \qquad E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\Gamma = \left\{x^2+y^2=1\right\}$$

$$\int_\Gamma \omega = \oint_0^{2\pi} \underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{=1}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi$$

א) ω אינה מדוייקת

ב) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ אינו פשוט קשר

הגדרה

יהיו $a_1, \dots a_k$ k ווקטורים ב$\mathbb{R}^n$.
הקבוצה

$$B\left(a_1, \dots a_k\right) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \theta_j a_j \middle| 0 \le \theta_j \le 1 \right\}$$

נקראת מקבילון k-ממדי, הנפרס ע"י קבוצת הווקטורים $\{a_1, \dots a_k\}$.

- אם $k = n = 2$, $B\left(a_1, a_2\right)$ מקבילית.
- אם $k = n = 3$, $B\left(a_1, a_2, a_3\right)$ מקבילון.

נסמן $M_{n,k}$ אוסף של מטריצות מגודל $n \times k$
$A = \{a_1, \dots a_k\}$ "נפח" k ממדי $V\left(A\right)$
L העתקה לינארית עם מטריצה A.
אזי:

$$B\left(a_1, \dots a_n\right) = L\left(\left[0,1\right]^n\right)$$

$$\left|B\left(a_1, \dots a_n\right)\right| = \left|\det A\right|$$

$$\left|L\left(E\right)\right| = \left|\det A\right| \cdot \left|E\right|$$

א) נניח $A = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$ כאשר $\beta \in \mu_{k \times k}$. ז"א $a_i^j = 0$ לכל $j > k$. אזי

$$\left|V\left(A\right)\right| = \left|\det B\right|$$

ב) לכל מטריצה אורתוגונלית T מגודל $n \times n$ מתקיים

$$V\left(T\left(A\right)\right) = V\left(A\right)$$

הגדרה

הנפח k-ממדי של $B\left(a_1, \dots a_k\right)$מוגדר ע"י

$$V\left(A\right) = \det\left(A^t \cdot A\right)$$

$$A^t A = \{a_{ij}\} \qquad a_{ij} = \left(a_i, a_j\right)$$

משפט

הפונקציה $V\left(A\right)$ היא פונקציה יחידה על $M_{n,k}$ המקיימת את התנאים (א) ו(ב)

הוכחה

$T^{t}T=I$ תכונה בסיסית לT אורתוגונלית.

$$V\left(TA\right)=\sqrt{\det\left[\left(TA\right)^{t}\left(TA\right)\right]}=\sqrt{\det\left(A^{t}T^{t}TA\right)}=\sqrt{\det\left(A^{t}A\right)}=V\left(A\right)$$

נניח $A^{t}A=B^{t}B\Leftarrow A=\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}$

$$\det\left(A^{t}A\right)=\det\left(B^{t}B\right)=\det\left(B^{t}\right)\det\left(B\right)=\left(\det B\right)^{2}$$

$$V\left(A\right)=\sqrt{\det\left(A^{t}A\right)}=\sqrt{\det B^{2}}=\left|\det B\right|$$

יחידות

נניח $F:M_{u,v}\to[0,\infty)$ שמקיימת (א) ו(ב).
נניח $A\in M_{n,k}$.
קיימת מטריצה אורתוגונלית T: $TA=\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}$

$$F^{2}\left(A\right)\overset{(ב)}{=}F^{2}\left(TA\right)\overset{(א)}{=}\left|\det B\right|^{2}=\left|\det B^{t}B\right|^{2}=$$

$$=\left|\det B^{t}B\right|=\left|\det\left(A^{t}A\right)\right|$$

$$\Rightarrow F\left(A\right)=\sqrt{\det\left(A^{t}A\right)}=V\left(A\right)$$

יהי $M\subset\mathbb{R}^{n}$ משטח k-ממדי.
נניח שיש $\left(F,\Omega\right)$ מפה. נסמן $F\left(\Omega\right)=U$

הגדרה

הנפח k-ממדי של U מוגדר על ידי

$$V\left(U\right)=\int_{\Omega}V\left(F'\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t=\int_{\Omega}\sqrt{\det\left[F'\left(t\right)^{T}F'\left(t\right)\right]}\,\mathrm{d}t$$

$$Q=\left\{t\in\mathbb{R}^k\middle|t_j^0\leq t_j\leq t_j^0+h,j=1,\dots k\right\}$$

$$t_0=\left(t_1^0,t_2^0,\dots t_k^0\right)\qquad\theta=\left(\theta_1,\dots\theta_k\right)\qquad0\leq\theta_j\leq1$$

$$t\in Q\Leftrightarrow t=t_0+h\theta$$

$$Q=\prod_{j=1}^{n}\left[a_j,a_{j+h}\right]$$

$$t\in\left[a_j,a_j+h\right]$$

$$a_j+\theta h\qquad\theta\in[0,1]$$

$$F\left(t_0+h\theta\right)=F\left(t_0\right)+F'\left(t_0\right)\cdot\left(h\theta\right)+r\left(h\theta\right)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{r\left(h\right)}{\|h\|}\to0$$

$$\left\{F'\left(t_0\right)\left(h\theta\right)|0\leq\theta_j\leq1\right\}=B\left(h\cdot F'\left(t_0\right)e_1,\dots hF'\left(t_0\right)e_k\right)$$

$$V\left(hF'\left(b\right)\right)=h^k\cdot V\left(F'\left(t_0\right)\right)=|Q|\vee\left(F'\left(t_0\right)\right)$$

$$V\left(F\left(\bigcup_i Q_i\right)\right)=\sum_i V\left(F\left(Q_i\right)\right)=\sum_i|Q|\,V\left(F'\left(t_i\right)\right)$$

הגדרה

תהי $f:M\to\mathbb{R}$ פונקציה עם $\mathrm{supp}\ f\subset F\left(\Omega\right)$
אינטגרל של f(ביחס לנפח) מוגדר על ידי

$$\int_U f\,\mathrm{d}V=\int_\Omega f\left(F\left(t\right)\right)V\left(F'\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t$$

אם יש יותר ממפה אחת:

$$\int_M f\,\mathrm{d}V=\sum_j\int_M\left(\rho_i f\right)\,\mathrm{d}V$$

אם $E \subset M$ אז נגדיר

$$V(E) = \int_M \chi_E \, \mathrm{d}V$$

דוגמה

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \middle| [a,b] \to \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\sqrt{\det \gamma'(t)^T \gamma'(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t)^2} = |\gamma'(t)|$$

במקרה של משטח 1־ממדי ־ הנפח הוא אורך.

הגדרה

אורך של עקום $\Gamma = \{\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n\}$ מוגדר על ידי $L(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$

המקרה הדו מימדי

$$\Gamma = \left\{ x^2 + y^2 = r^2 \right\} \qquad \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t = 2\pi r$$

$$|\gamma'(t)| = r$$

הערה: עבור אליפסה:

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\} \qquad \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

לא ניתן לחשב את האינטגרל בצורה כללית.

באופן כללי

$$S = \left\{ r(u,v) : D \to \mathbb{R}^2 \middle| D \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\sqrt{\det (r')^T r'} = |r_u' \times r_V'|$$

הגדרה

השטח פנים של S מוגדר על ידי

$$\mu\left(S\right)=\iint_{D}\left|r_{u}'\times r_{v}'\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

דוגמה

$$S=\left\{ x^{2}+y^{2}+z^{2}=R^{2}\right\}$$

$$r\left(u,v\right)=\left(R\cos u\cos v,R\sin u\sin v,R\sin v\right)\qquad v\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],u\in\left[0,2\pi\right]$$

$$r_{u}'\times r_{v}'=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa}\\
-R\sin u\cos v & R\cos u\cos v & 0\\
-R\cos u\sin v & -r\sin u\sin v & r\cos v
\end{vmatrix}=$$

$$=R^{2}\left(\cos^{2}v\cos u\right)\hat{\imath}+R^{2}\left(\cos^{2}v\sin u\right)\hat{\jmath}+R^{2}\left(\cos v\sin v\right)\hat{\kappa}$$

$$\left|r_{u}'\times r_{v}'\right|=R^{2}\sqrt{\cos^{4}v\cos^{2}u+\cos^{4}v\sin^{2}u+\cos^{2}v\sin^{2}v}=$$

$$=R^{2}\sqrt{\cos^{4}v+\cos^{2}v\sin^{2}v}=R^{2}\sqrt{\cos^{2}v}=R^{2}\cos v$$

$$M\left(S\right)=R^{2}\int_{D}^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=4\pi R^{2}$$

דוגמה: שטח של גרף של פונקציה

$$S:z=f\left(x,y\right)\qquad\left(x,y\right)\in D\subset\mathbb{R}^{2}$$

$$r\left(u,v\right)=\left(u,v,f\left(u,v\right)\right)$$

$$r_{u}'\times r_{v}'=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa}\\
1 & 0 & f_{u}'\\
0 & 1 & f_{v}'
\end{vmatrix}=-f_{u}'\hat{\imath}-f_{v}'\hat{\jmath}+\hat{\kappa}$$

$$M\left(S\right)=\iint_{D}\sqrt{1+\left(f_{u}'\right)^{2}+\left(f_{v}'\right)^{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

למה

נניח $C \in M_{k,k}$, $A \in M_{n,k}$ ו$B = AC$. אזי

$$V\left(B\right) = \left|\det C\right| V\left(A\right)$$

הוכחה

$$V^2\left(B\right) = \det\left(B^t B\right) = \det\left(\left(AC\right)^t\left(AC\right)\right) = \det\left(C^t\left(A^t A\right)C\right) = \left(\det C\right)^2 \det\left(A^t A\right)$$