

פיסיקה למתמטיקאים

משוואות המילטון

1. חלקיק בעל מסה m נע ללא חיכוך על פני חרוט. הזווית בין היוצר וציר החרוט α .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המערכת

נרשום תחילה לגראנג'יאן כללי בקואורדינטות גליליות עם פוטנציאל mgz

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

כעת, יהי s המרחק בין החלקיק לראשית (קודקוד החרוט). אזי $z = s \cos \alpha$ ו $r = s \sin \alpha$ ונקבל

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2 \sin^2 \alpha \dot{\theta}^2) - mgs \cos \alpha.$$

(ב) רשמו את ההמילטוניאן המתאים

$$\mathcal{H} = \dot{s}p_s + \dot{\theta}p_\theta - \mathcal{L} = \frac{p_s^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2ms^2 \sin^2 \alpha} + mgs \cos \alpha,$$

כאשר $\dot{s} = p_s/m$, $\dot{\theta} = p_\theta/ms^2 \sin^2 \alpha$ מתקבלים מתוך המשוואות בהתאמה. $p_s = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{s}$, $p_\theta = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\theta}$

(ג) רשמו את משוואת המילטון

ארבע משוואות המילטון הן

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ms^2 \sin^2 \alpha}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\dot{s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s} = \frac{p_s}{m}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = \frac{p_\theta^2}{ms^3 \sin^2 \alpha} - mg \cos \alpha.$$

נשים לב כי התנע הזיתי p_θ נשמר.

2. רשמו את ההמילטוניאן עבור הלגראנגיאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 4\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x + y)^2$$

נרשום תחילה את הלגראנגיאן המלוכסן

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 - \xi^2.$$

ההמילטוניאן המתאים ללגרנגיאן זה הוא

$$(1) \quad \mathcal{H} = \dot{\xi}p_{\xi} + \dot{\eta}p_{\eta} - \mathcal{L} = \frac{p_{\xi}^2}{6} + \frac{p_{\eta}^2}{2} + \xi^2,$$

ומן הטרנספורמציות

$$p_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x + p_y), \quad p_{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x - p_y), \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

נקבל

$$\mathcal{H} = \frac{1}{12}(p_x + p_y)^2 + \frac{1}{4}(p_x - p_y)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2.$$

נשים לב כי η קואורדינטה ציקלית ב (1) ולכן התנע הקוי
נשמר $p_{\eta} = -\dot{\eta} = -(\dot{x} - \dot{y})/\sqrt{2}$