89-195 תשע"א
תרגיל 3:

1. בהינתן הקבוצות $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,c,e,f\}$, $C=\{c,d,f,g\}$, חשבו את:

א. $D=(A\setminus B)\times(C\setminus B)$

ב. $E=(A\Delta B)\times(C\Delta B)$ (Δ - הפרש סימטרי)

2. הוכיחו שלכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים:

$$(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$$

3. איזה מהיחסים הבאים על הקבוצה $S=\{a,b,c,d\}$ הוא יחס שקילות ? הסבר.
עבור יחסי השקילות ציין מהן מחלקות השקילות.

א. $R_1=\{(a,a),(a,d),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,a),(d,d)\}$

ב. $R_2=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d)\}$

ג. $R_3=\{(a,a),(a,d),(b,b),(c,c),(d,c),(d,d)\}$

4. נתונים E יחס על הקבוצה A ו- F יחס על הקבוצה B. נגדיר את היחס G על הקבוצה $A\times B$ ע"י $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G$ אם ורק אם $(a_1,a_2)\in E$ וגם $(b_1,b_2)\in F$.
הוכח או הפרך: אם E ו- F יחסים סימטריים אזי G יחס סימטרי.

5. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים על קבוצת המספרים הממשיים, קבע האם הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי ~~והאם הוא יחס שקילות (הסבר)~~.

א. $x-y=1\Leftrightarrow xR_1y$

ב. $|x-y|=1\Leftrightarrow xR_2y$

ג. $|x-y|<1\Leftrightarrow xR_3y$

ק ס'ג

מתמטיקה בדידה תרגיל 3 - פיתרון

1.א. נחשב את הקבוצה $D=(A\setminus B)\times(C\setminus B)$

$$A\setminus B=\{a,d\}$$
$$C\setminus B=\{d,g\}$$

$$(A\setminus B)\times(C\setminus B)=\{(a,d),(a,g),(d,d),(d,g)\}$$

1.ב. נחשב את הקבוצה $E=(A\triangle B)\times(C\triangle B)$

$$A\triangle B=\{a,d,e,f\}=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

$$C\triangle B=\{d,g,b,e\}$$

$$\Rightarrow E=\{(a,d),(a,g),(a,b),(a,e)$$
$$(d,d),(d,g),(d,b),(d,e)$$
$$(e,d),(e,g),(e,b),(e,e)$$
$$(f,d),(f,g),(f,b),(f,e)\}$$

2. הוכיחו שלכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים
$$E=(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)=F$$

נראה ש $E\subseteq F$: אם $E=\emptyset$ אז ברור ש $E\subseteq F$. אחרת, יהי

$(a,b)\in E$ $\Leftarrow$ (לפי הגדרת חיתוך) מתקיים

$(a,b)\in(A\times C)$ וגם $(a,b)\in(B\times D)$ $\Leftarrow$ (לפי הגדרת מכפלה קרטזית)

$(a\in A$ וגם $b\in C)$ וגם $(a\in B$ וגם $b\in D)$ $\Leftarrow$ (לפי הגדרת חיתוך)

$a\in A\cap B$ וגם $b\in C\cap D$ $\Leftarrow$ (לפי הגדרת מכפלה קרטזית)

$(a,b)\in F$.

נראה $F\subseteq E$: אם $F=\emptyset$ אז ברור ש $F\subseteq E$. אחרת, יהי

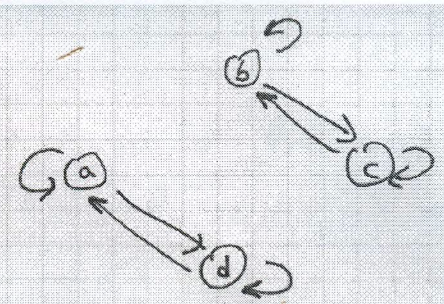
$(a,b)\in F$ $\Leftarrow$ (לפי הגדרת מכפלה קרטזית) $a\in A\cap B$ וגם $b\in C\cap D$

$\Leftarrow$ (לפי הגדרת חיתוך) ש- $a\in A$ וגם $a\in B$ וגם $b\in C$ וגם

$b\in D$ $\Leftarrow$ (לפי הגדרת מכפלה קרטזית) ש- $(a,b)\in(A\times C)$ וגם

$(a,b)\in(B\times D)$ $\Leftarrow$ (לפי הגדרת חיתוך) $(a,b)\in E$.

3. א.



R_1 יחס <u>רפלקסיבי</u> כיוון שעבור כל $x \in S$ קיים $(x,x) \in R_1$.

R_1 יחס <u>סימטרי</u> כיוון שעבור הצגות של איברים שונים המקיימים את היחס $(a,d) \in R_1$, (b,c) קיימים הצגות הסדורים ההפוכים (d,a), $(c,b) \in R_1$.

R_1 יחס <u>טרנזיטיבי</u> מתקיים

$(a,d),(d,d) \in R_1 \Rightarrow (a,d) \in R_1$

$(d,a),(a,a) \in R_1 \Rightarrow (d,a) \in R_1$

$(b,c),(c,c) \in R_1 \Rightarrow (b,c) \in R_1$

$(c,b),(b,b) \in R_1 \Rightarrow (c,b) \in R_1$

$(a,d),(d,a) \in R_1 \Rightarrow (a,a) \in R_1$

$(d,a),(a,d) \in R_1 \Rightarrow (d,d) \in R_1$

$(b,c),(c,b) \in R_1 \Rightarrow (b,b) \in R_1$

$(c,b),(b,c) \in R_1 \Rightarrow (c,c) \in R_1$

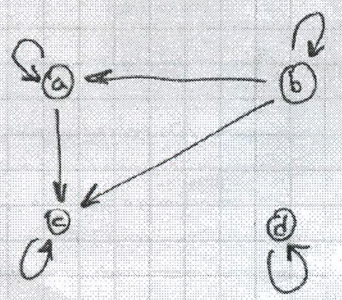
מחלקות השקילות הן:

$[a]_{R_1} = \{a,d\}$

$[b]_{R_1} = \{b,c\}$

לכן R_1 יחס שקילות. (נשים לב ש R_1 אינו אנטי-סימטרי כיוון שגם $(a,d) \in R_1$ וגם $(d,a) \in R_1$. לכן R_1 אינו יחס סדר חלקי.)

3. ב.



R_2 יחס <u>רפלקסיבי</u> כיוון שלכל $x \in S$ קיים $(x,x) \in R_2$.

(R_2 <u>אנטי-סימטרי</u> כי לא קיים זוג $(x,y) \in R_2$ כך ש $(y,x) \in R_2$ עבור $x \neq y$)

R_2 לא סימטרי כי $(b,a) \in R_2$ אבל $(a,b) \notin R_2$.

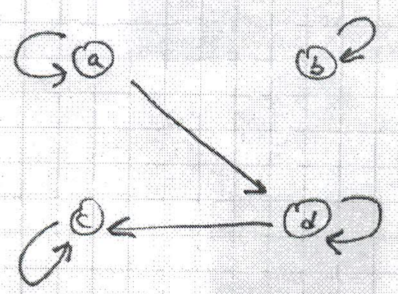
3ב. המשך:

R_2 טרנזיטיבי (כמו ב-R_1 יש את כל הקישורים הטרנזיטיביים, ובנוסף)

$(b,a)\in R_2$ וגם $(a,c) \Rightarrow (b,c)\in R_2$

לכן R_2 (יחס סדר חלקי, אבל) אינו יחס שקילות

3ג.



R_3 רפלקסיבי כי לכל $x\in S$ קיים $(x,x)\in R_3$.

R_3 (אנטי סימטרי כי לא קיים $(x,y)\in R_3$ וגם $(y,x)\in R_3$

כאשר $y\neq x$.)

R_3 לא סימטרי כי $(a,d)\in R_3$ אבל $(d,a)\notin R_3$.

R_3 לא טרנזיטיבי כיוון ש-$(a,d)\in R_3$ וגם $(d,c)\in R_3$

אבל $(a,c)\notin R_3$.

4. נוכיח שהטענה נכונה:

נניח ש-$((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G$ כאשר $(a_1,b_1)\neq(a_2,b_2)$

אזי בהכרח $(a_1,a_2)\in E$ וגם $(b_1,b_2)\in F$. לפי סימטריות

E ו-F מתקיים $(a_2,a_1)\in E$ וגם $(b_2,b_1)\in F$. לכן שוב לפי

הגדרת G מתקיים $((a_2,b_2),(a_1,b_1))\in G$

ולכן G סימטרי. (נשים לב שאם $a_1=a_2$ או $b_2=b_1$

אזי הטענה $(a_1,a_2)\in E \Rightarrow (a_2,a_1)\in E$ היא מיידית גם

ללא סימטריות E).

5.א. $x R_1 y \iff x-y=1$

היחס אינו רפלקסיבי כי עבור כל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x-x=0\neq 1$ ולכן $(x,x)\notin R_1$.

היחס אינו סימטרי כיוון ש $4R_1 3 \Leftarrow 4-3=1$ אבל $3-4=-1$ ולכן $(3,4)\notin R_1$.

היחס אינו טרנזיטיבי: $5R_1 4 \Leftarrow 5-4=1$ וגם $4R_1 3 \Leftarrow 4-3=1$ אבל $5-3=2\neq 1$ ולכן $(5,3)\notin R_1$.

5.ב. $x R_2 y \iff |x-y|=1$

היחס לא רפלקסיבי כי עבור כל $x\in\mathbb{R}$ $|x-x|=0\neq 1$ ולכן $(x,x)\in R_2$

היחס סימטרי כיוון שעבור $x\neq y$ שמתקיים xR_2y אזי $|y-x|=|-(x-y)|=|x-y|=1$ ולכן yR_2x

היחס לא טרנזיטיבי כי אם שוב כמו ב R_1 מתקיים $5R_24$ וגם $4R_23$ אבל $(5,3)\notin R_2$.

5.ג. $xR_3y \iff |x-y|<1$

היחס R_3 רפלקסיבי כיוון שעבור $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x-x|=0<1$ ולכן $(x,x)\in R_3$.

היחס סימטרי כיוון שלכל xR_3y עבור $x\neq y$ אזי $|y-x|=|x-y|<1$

$\Leftarrow$ yR_3x.

היחס אינו טרנזיטיבי: $5R_3 4.1$ וגם $4.1 R_3 3.2$

אבל $(5,3.2)\notin R_3$ $[|5-3.2|=1.8\geq 1]$