תורת הקבוצות תרגיל בית 9

1. יהיו κ, λ מונים גדולים מ0. הוכיחו: $\mathrm{cf}(\lambda+\kappa)=\mathrm{cf}(\kappa)$.

הוכחה: ראשית, נסמן $\mathrm{cf}(\kappa)=\alpha, \mathrm{cf}(\lambda+\kappa)=\beta$.

כיוון ראשון: נוכיח: $\alpha \le \beta$. לצורך כך נבנה פו' קופנלית מβ לκ. ובכן, קיימת $f:\beta\to\lambda+\kappa$ קופינלית. כלומר, לכל $\gamma<\beta$, $f(\gamma)<\lambda$ או $f(\gamma)=\lambda+\delta$ עבור איזשהו $\delta<\kappa$. אז נגדיר פונקציה $g:\beta\to\kappa$: $g(\gamma)=0$ אם $f(\gamma)<\lambda$, ו$g(\gamma)=\delta$ אם $f(\gamma)=\lambda+\delta$. נוכיח ש g קופינלית. ובכן, יהי $\epsilon\in\kappa$. קיים $\gamma\in\alpha$ כך ש $f(\alpha)\ge\lambda+\epsilon$. אזי, $g(\alpha)\ge\epsilon$.

כיוון שני:, נוכיח $\beta\le\alpha$. לצורך כך, נבנה פו' קופינלית מα ל $\lambda+\kappa$. קיימת $f:\alpha\to\kappa$ קופינלית. נגדיר $g:\alpha\to\lambda+\kappa$ ע"י $g(\gamma)=\lambda+f(\gamma)$. נוכיח ש$g$ קופינלית. יהי $\delta\in\lambda+\kappa$. אם $\delta<\lambda$ אז $\delta<\lambda\le\lambda+f(0)=g(0)$.

אם $\lambda\le\delta$, אז $\delta=\lambda+\epsilon$ לאיזשהו $\epsilon\in\kappa$. f קופינלית, ולכן קיים $\gamma\in\alpha$ כך ש $f(\gamma)\ge\epsilon$. אזי, $g(\gamma)=\lambda+f(\gamma)\ge\lambda+\epsilon=\delta$. מסקנה: g קופינלית.

2. הוכח את חוקי החזקות למונים:

א. $\kappa^{\lambda\mu}=(\kappa^{\lambda})^{\mu}$.

ב. $(\kappa\lambda)^{\mu}=\kappa^{\mu}\lambda^{\mu}$.

א. נבנה פו' חח"ע ועל ${}^{\lambda\mu}\kappa \to {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)$ באופן הבא: תהי $f:\lambda\times\mu\to\kappa$. נגדיר $g:\mu\to({}^{\lambda}\kappa)$ ע"י, $g_x(y)=f(x,y)$ לכל $x\in\mu, y\in\lambda$.

נוותר על הבדיקה של חח"ע ועל.

ב. נבנה פו ' חח"ע ועל ${}^{\mu}(\kappa\times\lambda) \to {}^{\mu}\kappa\times{}^{\mu}\lambda$ באופן הבא: תהי $f:\mu\to\kappa\times\lambda$, $f(x)=(y,z)$. נשלח את f ל (g,h), $g:\mu\to\kappa, h:\mu\to\lambda$ שמוגדרות כך: $g(x)=y, h(x)=z$.

נוותר על הבדיקה של חח"ע ועל.

3. נניח $2^{\aleph_0}=\aleph_{18}$. הוכיחו כי: $(\aleph_1)^{\aleph_0}=(\aleph_2)^{\aleph_0}$.

$\aleph_1,\aleph_2>2$ ולכן $(\aleph_2)^{\aleph_0},(\aleph_1)^{\aleph_0}\ge 2^{\aleph_0}$. מצד שני, $\aleph_1,\aleph_2<\aleph_{18}$, ולכן $(\aleph_1)^{\aleph_0},(\aleph_2)^{\aleph_0}\le(\aleph_{18})^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{(\aleph_0\times\aleph_0)}=2^{\aleph_0}$. כלומר, קיבלנו ש $2^{\aleph_0}=(\aleph_1)^{\aleph_0}=(\aleph_2)^{\aleph_0}$.

4. הוכיחו: $(\aleph_1)^{\aleph_0}=\aleph_1$ אמ"ם $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

$\Longleftarrow$: $2^{\aleph_0}>\aleph_0$, ולכן $2^{\aleph_0}\ge\aleph_1$. מצד שני, $2<\aleph_1$, ולכן $2^{\aleph_0}\le\aleph_1^{\aleph_0}=\aleph_1$. כלומר, $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

$\Longrightarrow$: אם $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, אז $(\aleph_1)^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\times\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

5 . הוכיחו: $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

$|\mathbb{N}|=\aleph_0$ מהגדרה.

נוכיח $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$

נבנה פו' חח"ע ועל מ $\mathbb{Z}$ ל $\mathbb{N}$: $f(0)=0$. ואם n חיובי, אז $f(n)=2n$, $f(-n)=2n+1$.

נוכיח: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.
מצד אחד, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, אז $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$.
מצד שני, נבנה פו' על $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ע"י: $f(a,b) = \frac{a}{b}$. לכן יש פו' חח"ע $\mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
לכן, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| \times |\mathbb{Q}| = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.
הערה: קיום הפו' החח"ע לא דורש את אקסיומת הבחירה, כי $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ בת מניה, ולכן סדורה היטב.

6. נגדיר באינדוקציה על ω: $\alpha_0 = \aleph_0$, $\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n}$, $\alpha = sup\{\alpha_n, n < \omega\}$.
הוכחנו בכיתה ש α מקיים $\alpha = \aleph_\alpha$. הוכיחו שהוא הסודר הראשון שמקיים זאת.
הוכחה: יהי $\beta < \alpha$. צ"ל ש $\beta \neq \aleph_\beta$.
ובכן $\beta < \alpha \Longleftarrow$יש n כך ש $\beta < \alpha_n$. נקח את הn הראשון שמקיים זאת.
אם $n = 0$, אז $\beta < \omega$, וכמובן ש $\beta < \aleph_\beta$, כי $\aleph_\beta$ אינסופי.
אחרת, ה n הראשון שמקיים זאת הוא עוקב. כלומר, יש m כך ש $\alpha_m \leq \beta < \alpha_{m+1}$.
אזי, $\beta < \alpha_{m+1} = \aleph_{\alpha_m} \leq \aleph_\beta$. מש"ל.