תרגיל בית 1 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. בדקו האם הפולינומים הבאים אי פריקים:

א. $3x^2-7x-5$ ב-$\mathbb{Q}[x]$ (גם בלי נוסחת השורשים).

ב. x^3-7x+2 ב-$\mathbb{Q}[x]$.

ג. x^3-7x+2 ב-$\mathbb{Z}_5[x]$.

ד. x^3-6x-9 ב-$\mathbb{Q}[x]$.

ה. $x^4+4x^3+6x^2+2x+1$ ב-$\mathbb{Q}[x]$.

שאלה 2. מצאו את הפירוק של הפולינום x^4-2 מעל השדות הבאים:

א. $\mathbb{C}$

ב. $\mathbb{R}$

ג. $\mathbb{Q}$

ד. $\mathbb{Z}_3$

שאלה 3. יהי $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ פולינום עם מקדמים שלמים. נניח כי a_n, $f(0)$ ו-$f(1)$ הם אי זוגיים. הוכיחו כי ל-f אין שורשים ב-$\mathbb{Q}$. רמז: טענה מהתרגול.

שאלה 4. יהי $f(x)\in F[x]$ פולינום ממעלה $n\geq 1$.

א. הוכיחו כי $F[x]/\langle f(x)\rangle$ הוא מרחב וקטורי מעל F עם בסיס $\left\{\overline{1},\overline{x},\ldots,\overline{x}^{n-1}\right\}$.

ב. הציגו את

$$x^4-x^3+x-2\in\mathbb{Q}[x]/\left\langle x^3-x^2-1\right\rangle$$

כצירוף לינארי של אברי הבסיס $\left\{\overline{1},\overline{x},\overline{x}^2\right\}$.

שאלה 5 (חזרה לשיטת הרדוקציה למי ששכח)**.** יהי $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ויהי p מספר ראשוני. נסמן ב-$\varphi\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ את הומומורפיזם ההטלה. אפשר להרחיב את φ לפונקציה

$$\psi\colon\mathbb{Z}[x]\to\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)[x]$$

שפשוט "עושה מודולו" לכל מקדם של הפולינום, והיא עדיין הומומורפיזם של חוגים. נניח ש-$\deg\psi(f(x))=\deg f(x)$ וגם $\psi(f(x))$ אי פריק. הוכיחו כי $f(x)$ אי פריק.
הדרכה: נניח בשלילה ש-$f(x)=g(x)h(x)$ הוא פירוק אמיתי (כלומר לאיברים לא הפיכים). שימו לב כי $\psi(f(x))=\psi(g(x))\psi(h(x))$ ועכשיו משהו במעלות הפולינומים לא מסתדר.

בהצלחה!