בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ז סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 20 נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

שאלה 1 (20 נק')

תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

i. אם $A \subseteq B$ אזי $A \Delta C \subseteq B \Delta C$.

ii. אם $A \setminus B \subseteq C$ אזי $A \setminus (C \cup B) = \phi$.

iii. אם $A \subseteq P(B)$ אזי $B \setminus A = B$.

iv. אם $(A \setminus B) \cap C \subseteq (A \cup B) \setminus C$ אזי $A \subseteq C$.

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

שאלה 2

סעיף א (12 נקודות)

נגדיר יחס R על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ על ידי $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a \le c)\wedge(b=d)$.

i. הוכיחו כי R יחס סדר חלקי.
ii. מצאו את כל האיברים המינימליים לפי R.
iii. האם יש איבר קטן ביותר? נמקו.
iv. האם R יחס סדר מלא? נמקו.

סעיף ב (8 נקודות)

נגדיר יחס S על $P(\mathbb{N})$ על ידי $XSY \Leftrightarrow X \subseteq Y \vee Y \subseteq X$,
<u>הוכיחו/הפריכו</u>: S יחס שקילות.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

דף נוסף לשאלה מספר ____________________

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי L קבוצה של ישרים במישור מהצורה $y=mx+n$ (כלומר ללא ישרים המקבילים לציר y).
תהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצת כל נקודות החיתוך בין שני ישרים שונים מ L,
ותהי $M\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת כל השיפועים של ישרים מ L.

א. <u>הוכיחו/הפריכו</u>: אם M סופית אזי D בת מנייה.
ב. <u>הוכיחו/הפריכו</u>: אם $|M|=\aleph$ אזי $|D|=\aleph$.
ג. <u>הוכיחו/הפריכו</u>: אם $|M|=\aleph$ אזי $|L|=\aleph$.
ד. הוכיחו שאם L בת מנייה, אזי גם D בת מנייה.

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

שאלה 4

סעיף א (15 נקודות)

תהי קבוצה A ותהי פונקציה $\psi:P(A)\to P(A)$ המקיימת לכל $X,Y\subseteq A$ שאם $X\subseteq Y$ אזי $\psi(X)\subseteq\psi(Y)$.

הוכיחו כי קיימת קבוצה $K\subseteq A$ עבורה $K=\psi(K)$.

סעיף ב (5 נקודות)

תהי קבוצה A ותהי פונקציה $\psi:P(A)\to P(A)$ כך ש $\psi(A)\neq A$ ולכל $X\subseteq A$ מתקיים $X\cup\psi(\psi(X))=A$.

הוכיחו כי קיימות $X,Y\subseteq A$ כך ש$X\subseteq Y$ וגם $\psi(X)\not\subseteq\psi(Y)$.

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

שאלה 5

<u>סעיף א (10 נקודות)</u>

תהי סדרת קבוצות המקיימת $A_{n+1}=P(A_n)\setminus A_n$, $A_1=\phi$.

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\phi\in A_{2n}$.

<u>סעיף ב (10 נקודות)</u>

יהי גרף קשיר G בעל קבוצת קודקודים V המחולקת לשתי קבוצות $A,B\subseteq V$ כך ש $A\cap B=\phi$, $A\cup B=V$ ו $A,B\neq\phi$.

נניח שכל צלע ב G היא בין קודקוד מ A לקודקוד ב B.

הוכיחו שאם ב G יש מספר אי זוגי של צלעות, אין בגרף מעגל אוילר.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

דף נוסף לשאלה מספר ___________________