מידות מכפלה ומשפט פוביני

נתחיל עם שני מרחבי מידה חיובית (X,S,u) ו(Y,T,v). נבנה בצורה קנונית "מידת מכפלה" $w=u\times v$ על σ אלגברה U של תת קבוצות של $X\times Y$.

הגדרה

תהי $E\in S$ ו$F\in T$ קבוצות(מדידות) כלשהן. המכפלה הקרטזית $X\times Y\supset E\times F$ נקראת מלבן מדיד. נגדיר את נפחו ע"י

$$|E\times F|=u\left(E\right)\cdot v\left(F\right)$$

הגדרה

לכל $E\subset X\times Y$ נגדיר מידה חיצונית $w^{*}\left(E\right)=\inf\limits_{E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R_{n}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|R_{n}|$ כאשר הR_{n} מלבנים מדידים.

הגדרה

עבור $E\subset X\times Y$ נאמר שE "מדידה" אם לכל תת קבוצה $S\subset X\times Y$

$$w^{*}\left(S\right)=w^{*}\left(S\cap E\right)+w^{*}\left(S\cap E^{\complement}\right)$$

ונגדיר U להיות אוסף כל הקבוצות המדידות.

משפט 1

U היא σ אלגברה של תת־קבוצות של $X\times Y$. U מכילה כל קבוצה $E\subset X\times Y$ כך ש$w^{*}\left(E\right)=0$ וכל מלבן מדיד(נמצא בU). יתר על כן הצמצום של w^{*} לU הוא מידה המכונה $w=u\times v$, ולכן מלבן מדיד R $|R|=w\left(R\right)$.

הגדרה

קבוצה $E\subset X\times Y$ היא מטיפוס R_{σ} אם היא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים, וE מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ אם היא חיתוך בן מניה של קבוצות בR_{σ}.

אוטומטית, כל קבוצה R_{σ} או $R_{\sigma\delta}$ נמצאת בU.

משפט 2

אם $E\in R_{\sigma}$ אז E=**איחוד** בן מניה של מלבנים מדידים. ואם $E\in R_{\sigma\delta}$ אז E=**חיתוך יורד** בן מניה של קבוצות בR_{σ}($E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R_{n}$, $R_{1}\supset R_{2}\supset\cdots$)

משפט 3

נניח ש$E \in U$ ו$w\left(E\right) < \infty$. אזי קיים $F \in R_{\sigma\delta}$ ו$G \in U$ כך ש$w\left(G\right) = 0$ ו$F = E \uplus G$(או
....

הוכחה

....
$s \leq w\left(R_n\right) < S + 1/n$. לבסוף נגדיר $R = \bigcap_{k=1}^{\infty} R_n \in R_{\sigma\delta}$, ולפי הבנייה לכל n $E \subset R_n$ ולכן $E \subset R$.
ז.א. לכל n $E \subset R \subset R_n$. יוצא שלכל n

$$w\left(E\right) \leq w\left(R\right) \leq w\left(R_n\right)$$

$$s \leq w\left(R\right) < S + 1/n$$

משפט הסנדוויץ נותן $w\left(E\right) = s = w\left(R\right)$, לכן $R = E \uplus R \backslash E$. אם רק נגדיר $F = R$, $G = R \backslash E$ אז $F \in R_\sigma$, $w\left(G\right) = 0$ ו $\boxed{F = E \uplus G}$.

■

משפט 4(משפט פוביני)

יהיו $\left(X, S, u\right)$ ו$\left(Y, T, v\right)$ שני ממ"ח, u, v שלמות. נבנה כנ"ל $\left(X \times Y, U, w\right)$, ונניח ש: f $X \times Y \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית $\mathrm{d}w$. אזי:

א. לכמעט כל $x \in X$, הפונקציה $f_x\left(y\right) = f\left(x, y\right)$ אינטרגבילית $\mathrm{d}v$ על Y.

ב. לכמעט כל $y \in Y$, הפונקציה $f_y\left(x\right) = f\left(x, y\right)$ אינטגרבילית $\mathrm{d}u$ על X.

ג. הפונקציה $g\left(x\right) = \int_Y f\left(x, y\right)\,\mathrm{d}v\left(y\right)$ אינטגרבילית $\mathrm{d}u$ על X.

ד. הפונקציה $h\left(y\right) = \int_X f\left(x, y\right)\,\mathrm{d}u\left(x\right)$ אינטרבילית $\mathrm{d}v$ על Y.

ה. $\int_X \left[\int_Y f\,\mathrm{d}v\right]\,\mathrm{d}u = \int_{X \times Y} f\,\mathrm{d}w = \int_Y \left[\int_X f\,\mathrm{d}u\right]\,\mathrm{d}v$

תקציר ההוכחה

כאן נוכיח בעיקר רק טענה (ה), ולזה מספיק להראות ש$\int_X \left[\int_Y f\,\mathrm{d}v\right]\,\mathrm{d}u = \int_{X \times Y} f\,\mathrm{d}w$, כי השוויון השני שקול לזה ע"י סימטריה.
ההוכחה בכמה שלבים:

שלב א'

$f = I_E$; $E = A \times B$ מלבן מדיד.
כיוון שf אינטגרבילית, בהכרח $w(E) < \infty$ ולכן $u(A) < \infty$ וגם $v(B) < \infty$.
תחילה נעיר ש$E = A \times B$ אומר $I_E(x,y) = I_A(x) I_B(y)$.
נובע:

$$\int_X \mathrm{d}u \int_Y I_E(x,y)\, \mathrm{d}v(y) = \int_X \mathrm{d}u \int_Y I_A(x) I_B(y)\, \mathrm{d}v(y) =$$

$$= \int_X I_A(x)\, \mathrm{d}u \int_Y I_B(y)\, \mathrm{d}v = u(A)\, v(B) = w(E) = \int_{X\times Y} I_E\, \mathrm{d}w$$

שלב ב'

$f = I_E$, $E \in R_\sigma$, $w(E) < \infty$.
לפי משפט 2 $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} R_n$, R_n מלבנים מדידים. כיוון שהאיחוד זר

$$I_E(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{R_n}(x,y)$$

נובע:

$$\int_X \mathrm{d}u \int_Y I_E(x,y)\, \mathrm{d}v = \int_X \mathrm{d}u \int_Y \left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{R_n}(x,y)\right] \mathrm{d}v =$$

$$\overset{\text{monotony}}{=} \int_X \mathrm{d}u \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y I_{R_n}(x,y)\, \mathrm{d}v =$$

$$\overset{\text{monotony}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathrm{d}u \int_Y I_{R_n}(x,y)\, \mathrm{d}v$$

$$\overset{\text{stage } \aleph,\ R_n \text{ measurable rectangle}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X\times Y} I_{R_n}(x,y)\, \mathrm{d}w$$

$$\overset{\text{monotony}}{=} \int_{X\times Y} \sum_{n=1}^{\infty} R_{R_n}(x,y)\, \mathrm{d}w$$

שלב ג'

$f=I_E$, $E\in R_{\sigma\delta}$, $w\left(E\right)<\infty$.

כאן $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, כל $E_n\in R_\sigma$ ו $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$. כיוון ש$w\left(E\right)<\infty$ בה"כ $w\left(E_1\right)<\infty$. נובע ש:

$$I_{E_1}\left(x,y\right)\geq I_{E_2}\left(x,y\right)\geq\cdots\geq E_E\left(x,y\right)=\lim_{n\to\infty}I_{E_n}\left(x,y\right)$$

כעת נעיר שע"פ תרגיל

$$\int_{X\times Y}I_E\,\mathrm{d}w=w\left(E\right)\overset{\text{ex}}{=}\lim_{n\to\infty}w\left(E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}I_{E_n}\,\mathrm{d}w\overset{\text{stage ב}}{=}\lim_{n\to\infty}\int_X\mathrm{d}u\int_Y I_{E_n}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}v$$

באינטגרל הפנימי יש לנו פונקציות $I_{E_n}\left(x,y\right)$(עבור x קבוע). לפי הבנייה לכל $x\in X$ $0\leq I_{E_n}\left(x,y\right)\leq I_{E_1}\left(x,y\right)$ ו$I_{E_n}\left(x,y\right)\to I_E\left(x,y\right)$.

מוכיחים שעבור כמעט כל x $I_{E_1}\left(x,y\right)$ אינטגרבילית $\mathrm{d}v$ ולכן אפשר להפעיל את התכנסות נשלטת לומר

$$\lim_{n\to\infty}\int_X\mathrm{d}u\int_Y I_{E_n}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}v=\int_X\mathrm{d}u\int_Y I_E\left(x,y\right)\,\mathrm{d}v$$

שווחה לכתחילה $\int_{X\times Y}I_E\,\mathrm{d}w$, וזה שלב ג'.

שלב ד'

$f=I_E$.

$w\left(E\right)=0$.

שלב ה'

$f=I_E$, E מדידה ו$w\left(E\right)<\infty$.

ממשפט 3 ידוע: קיים $f\in R_{\sigma\delta}$ ו$G\in U$, $w\left(G\right)=0$ כך ש$F=E\uplus G$. לכן $I_F=I_E+I_G$. לגבי I_F המשפט הוכח בשלב ג' ולגבי I_G המשפט הוכח בשלב sw. לכן שלב ה' נובע מלינאריות האינטגרלים.

שלב ו'

f=פונקציה פשוטה אינטגרבילית. ז.א. $f=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kI_{E_k}$, וכיוון ש$f$ אינטגרבילית כל $w\left(E_k\right)<\infty$.

המשפט כבר הוכח לכל I_{E_k} בלב ה', ולכן שלב ו' נובע מלינאריות האינטגרל.

שלב ז'

$f\left(x,y\right)\geq 0$ ואינטגרבילית $\mathrm{d}w$.

כידוע יש סדרה $0\leq\varphi_1\leq\varphi_2\leq\varphi_3\leq\cdots$ של פונקציות פשוטות ששואפות נקודתית לf. כיוון שכל $\varphi_n\leq f$, כל φ_n אינטגרבילית, וע"פ מונוטוניות נוכל לומר

$$\int_{X\times Y}f\,\mathrm{d}w=\lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_n\,\mathrm{d}w=\lim_{n\to\infty}\int_X\mathrm{d}u\int_Y\varphi_n\,\mathrm{d}v=\int_X\mathrm{d}u\int_Y f\,\mathrm{d}v$$

שלב ח'

f אינטגרבילית כלשהי.

אזי $f = f^{+} - f^{-}$ כאשר f^{+} ו-f^{-} לא שליליות ואינטגרביליות. בשלב ז' המשפט הוכח ל-f^{+} ו-f^{-}, ולכן שלב ח' נובע מלינאריות האינטגרל.

$\blacksquare$

הערות

1. אפשר להראות שאם $u = v =$ מידת לבג על $\mathbb{R}$ אז $u \times v = w =$ מידת לבג על $\mathbb{R}^2$, ובאינדוקציה אפשר לבנות מידת לבג לכל $\mathbb{R}^n$.
2. אף על פי שהמשפט נוסח לפונקציות על $X \times Y$ כולו, אפשר להפעיל אולו עבור $f(x,y)$ מוגדרת באיזו $E \in U$ ע"י זה שנמשיך את $f(x,y)$ להיות 0 ב-$E^{\complement}$.
3. כבר הוכיחו בתרגיל שאם $u =$ מידת הספירה על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ אז בעצם לפונקציה כלשהי $f : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, ואם $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי היא אינטגרבילית $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס בהחלט, ואם כן $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.
   אם נפעיל את פוביני ל-$u \times u$ על על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ נקבל תוצאה על טורים כפולים: אם $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$ אז
   $$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$
4. יש הכללה של משפט פוביני לפונקציות $f : X \times Y \to [0,\infty]$ שבה אין צורך להניח מראש ש-f אינטגרבילית $\mathrm{d}w$. אבל משפט זה נכון רק בהנחה נוספת: שהמידות u ו-v "σ סופיות".

הגדרה

תהי (X,S,u) ממ"ח. אומרים ש-u σ־סופית אם יש קבוצות $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-S כך ש-$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ ולכל n $u(E_n) < \infty$.

למשל

מידת לבג על $\mathbb{R}$ לא מידה סופית כי $m(\mathbb{R}) = \infty$, אבל היא σ־סופית כי $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-n,n)$ ו-$m(-n,n) = 2n < \infty$.

משפט 5(משפט טונלי)

יהיו (X,S,u) ו(Y,T,v) ממ"ח עבור מידות שלמות וσ־סופיות u וv. נניח ש־$f : X \times Y \to [0,\infty]$ מדידה $\mathrm{d}w$. אזי:

א. לכמעט כל x, $f_x(y) = f(x,y)$ מדידה T.

ב. לכמעט כל y, $f_y(x) = f(x,y)$ מדידה S.

ג. $g(x) = \int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}v(y)$ מדידה S.

ד. $h(y) = \int_X f(x,y)\ \mathrm{d}u(x)$ מדידה T.

ה. $\int_X \left[\int_Y f\,\mathrm{d}v\right]\ \mathrm{d}u = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}w = \int_Y \left[\int_X f\,\mathrm{d}u\right]\ \mathrm{d}v$

הוכחה

ההוכחה בדיוק כמו זו של משפט פוביני בשלבים (א)←(ו), ודוקא לפונקציות פשוטות ואינטגרביליות(כמו בפוביני). רק בשלב ז' יש שינוי קטן:

אם $f : X \times Y \to [0,\infty]$ מדידה, אז היא גבול של סדרה עולה של פונקציות פשוטות ו<u>אינטגרביליות</u>. אפילו אם f לא אינטגרבילית(בגלל σ־סופיות המידות) שלב ח' איננו!

מבוא לאנליזה פונקציונלית

הגדרה

יהי X מרחב וקטורי מעל שדה $K = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. "נורמה" על X היא פונקציה $\| \ \| : X \to [0,\infty]$ כך שלכל $x, y \in X$ ו-$\alpha \in K$ מתקיים:

א. $\|x\| \geq 0$ עם שוויון רק עבור $x = 0$.

ב. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

ג. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$(אי שוויון המשולש)

הזוג $(X, \| \ \|)$ נקרא מרחב נורמי.

דוגמאות פשוטות

א. $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ עם הנורמה האוקלידית $\|x\| = \|(x_1, \dots x_n)\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$.

ב. על $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ יש עוד נורמות, למשל $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.

כל נורמה על X משרה מטריקה ע"י $d(x,y) = \|x - y\|$, ובודקים את הדרישות של מטריקה:

I. $d(x,y) \geq 0$ עם שוויון רק עבור $x = y$.

II. $d(x,y) = d(y,x)$

III. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ - אי שוויון המשולש.

הערות פשוטות

1. במרחב נורמי $\|x\| = \|x - 0\| = \operatorname{dist}(x, 0)$.

2. המטריקה במרחב נורמי שמורה תחת הזזה. ז.א. אם $x, y, z \in X$

$$\operatorname{dist}(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, y)$$

ברגע שיש מטריקה, יש מושג של התכנסות של סדרות, גבולות וכו'.

הגדרה

יהי $(X, \|\ \|)$ מרחב נורמי, ותהי $\{x_n\}$ סדרה של נקודות בX. עבור $x_0 \in X$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $n > n_0$

$$\|x_n - x_0\| = d(x_n, x_0) <$$

סדרת $\{x_n\}$ בX נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $m, n > n_0$, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

קל להוכיח שכל סדרה שמתכנסת היא סדרת קושי. ההפך לא תמיד נכון. אם $(X, \|\ \|)$ מרחב נורמי שבו כל סדרת קושי מתכנסת לאיבר בX, אז אומרים שX מרחב שלם. מרחב נורמי שלם נקרא *מרחב בנך*.

דוגמאות

1. ניקח קטע סגור $[a, b] \subset \mathbb{R}$. $C([a, b])$ הוא אוסף כל הפונקציות $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ כך שf רציפה ב$[a, b]$. פשוט ש$C([a, b])$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מקובל להגדיר נורמה על $C([a, b])$ ע"י $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

   נבדוק שזו נורמה:

   א. לכל $f \in C([a, b])$, $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \geq 0$, ואם $\|f\| = 0$ הרי המקסימום של $|f(x)|$ הוא 0, לכן $f(x) \equiv 0$ ב$[a, b]$.

   ב. אם $\alpha \in \mathbb{R}$ ו$f \in C([a, b])$,

$$\|\alpha f\| = \max |\alpha f(x)| = \max |\alpha| |f(x)| = |\alpha| \max |f(x)| = |\alpha| \|f\|$$

   ג. אם $f, g \in C([a, b])$ אז לכל $x \in [a, b]$

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

   הדבר נכון לכל $x \in [a, b]$, לכן

$$\|f + g\| = \max_{x\in[a,b]} |(f + g)(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

   וזה אי שוויון המשולש.

   לגבי סדרה $\{f_n\}$ ב$C([a, b])$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ אם $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. ז.א. $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff$, וזה אומר בדיוק ש$f_n \to f$ במ"ש ב$[a, b]$.

   סדרת קושי $\{f_n\}$ ב$C([a, b])$ היא סדרה כזאת שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $m, n > n_0$

$$\varepsilon > \|f_m - f_n\| = \max_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)|$$

במונחים של אינפי 2 התנאי הנ"ל אומר ש$\{f_n\}$ קושי במ"ש ב$[a,b]$. מוכיחים שם שבתנאי זה קיים גבול $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ במ"ש ב$[a,b]$, וע"פ משפט נוסף באינפי נסיק שf רציפה ב$[a,b]$. ז.א. $f\in C([a,b])$ ו$f_n\to f$ במ"ש. ז.א. בנורמה של $C([a,b])$ ולכן $C([a,b])$ מרחב שלם.

2. אם K מרחב האוסדורף קומפקטי מגדירים $C(k)$(ממשי) להיות כל הפונקציות הרציפות $f:K\to\mathbb{R}$(ומרוכב ע"י פונקציות $f:K\to\mathbb{C}$).

פשוט ש$C(k)$ מרחב וקטורי, והוא הופך להיות מרחב בנך ע"י הנורמה $\|f\| = \max\limits_{x\in K}|f(x)|$.

3. נגדיר $P\subset C([a,b])$ להיות אוסף כל הפולינומים הממשיים.

פשוט שP תת מרחב של $C([a,b])$ ו$\left(P,\|\ \|_{C([a,b])}\right)$ מרחב נורמי מעל $\mathbb{R}$. אבל מרחב זה לא שלם כי קל לבנות סדרת פולינומים $\{p_n\}$ שמתכנסת במ"ש על $[a,b]$ לפונקציה שהיא לא פולינום. למשל אם $p_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $p_n(x)\to e^x$ במ"ש ב$[a,b]$ וe^x לא פולינום.

4. ניקח ממ"ח (X,S,u) המרחב $L^p(\mathrm{d}u)$, $1\le p\le\infty$, הוא מרחב כל הפונקציות $f:X\to\mathbb{R}^*$ מדידות S כך ש$\|f\|_p=\left(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}m\right)$.

נסיים בהערה

$\|f\|_p$ שהגדרנו היא לא נורמה! כי אם $f(x)\equiv 0$ כב"מ בX $\|f\|_p=0$ אף על פי ש$f(x)\not\equiv 0$.

אלא שחייבים להגדיר $L^p(\mathrm{d}u)$ כמרחב של מחלקות שקילות עם התנאי $f\sim g$ אם $f(x)=g(x)$ כב"מ($\mathrm{d}u$). נוכיח שאם כן, L^p מרחב בנך.