אנליזת פורייה ויישומים

16 בספטמבר 2014

תוכן עניינים

חלק I

הרצאה 1

חלק II

הרצאה 2

1 מרחבים

1.1 מרחב L^2

$$f,g\in C\left[a,b\right]$$

נגדיר מכפלה פנימית

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_a^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx\\ ||f|| &= \sqrt{\langle f,f\rangle}=\int_a^b \left|f\right|^2 dx\end{aligned}$$

הערה 1.1 נורמה של f קיימת אם $\left|f\right|^2$ הינה אינטגרבילית. במקרה זה ניתן להגדיר מרחק בין פונקציות ע"י $||f-g||$ ($||f-g||=0\Leftrightarrow f=g$).

הגדרה 1.2 $L^2\left[a,b\right]$ מרחב הפונקציות $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ כך ש$\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|^2dx<\infty$.
מבחינה מעשית יש לבדוק את התנאי האחרון ולבדוק האם פונ' שייכת ל$L^2\left[a,b\right]$.

דוגמא:

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \begin{cases}1 & 1\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}\\ ||f||^2 &= \int_0^{0.5}dx=\frac{1}{2}\Rightarrow f\in L^2\left[a,b\right]\end{aligned}$$

דוגמא לפונ' שלא שייכת ל$L^2\left(a,b\right)$:

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{x}},\ 0<x<1\\ ||f||^2 &= \int_0^1\frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^1\frac{1}{x}dx\\ &= -\lim_{\epsilon\to0^+}\ln\epsilon=\infty\end{aligned}$$

עוד דוגמא:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\ -1 & else\end{cases}$$

1.1.1 התכנסות בנורמה

סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב$L^2(a,b)$ מתכנסת בו אם קיימת פונקציה $f\in L^2(a,b)$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||=0$$

1.2 מרחב l_p

הגדרה 1.3 $x\in l_2$ אם $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מתכנסת (כלומר $\sum|\xi_n|^2<\infty$).

הגדרה 1.4 הגדרת הנורמה והמכפלה פנימית במקרה זה:

$$\begin{aligned}||x||_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\\ \langle x,y\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}\end{aligned}$$

1.2.1 אי שוויון קושי שוורץ עבור l_2

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|y_k|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2}$$

הגדרה 1.5 באופן דומה עבור $p>1$ ניתן להגדיר מרחב l_p: $x\in l_p$ אם $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty$.

$$||x||_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

1.2.2 אי שוויון הלדר (Holders inequality)

אם נתונות שתי סדרות $x\in l_p, y\in l_q$ כאשר l_p,l_q מרחבים צמודים (כלומר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|\eta_n|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

הוכחה: ניעזר באי שוויון יונג Jung: עבור p,q צמודים $\forall\alpha,\beta>0:\alpha\beta\leq\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$.
נסמן $\alpha=\frac{|\xi_n|}{||x||_p},\beta=\frac{|\eta_n|}{||y||_q}$.
נציב לאי שוויון יונג:

$$\frac{|\xi_n|}{||x||_p}\frac{|\eta_n|}{||y||_q}\leq\frac{|\xi_n|^p}{||x||_p^p\,p}+\frac{|\eta_n|^q}{||y||_q^q\,q}$$

נעבור לסכומים:

$$\begin{aligned}\frac{\sum|\xi_n|\,|\eta_n|}{||x||_p\,||y||_q} &\leq \frac{\sum|\xi_n|^p}{||x||_p^p\,p}+\frac{\sum|\eta_n|^q}{||y||_q^q\,q}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\\ &\Downarrow\\ \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|\eta_n| &\leq ||x||_p\,||y||_q\end{aligned}$$

נציב את ההגדרה של נורמה ונקבל את הדרוש. ■

תרגיל

נתונה סדרה $x=\left\{\frac{5^n-3^n}{7^n}\right\}\in l_2$, נחשב את $||x||_2$:

$$\begin{aligned}||x||_2 &= \sqrt{\sum|\xi_n|^2}\\ ||x||_2^2 &= \sum\left(\frac{5^n-3^n}{7^n}\right)^2\\ &= \sum\frac{25^n-2*15^n+9^n}{49^n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{49}\right)^n-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15}{49}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{49}\right)^n\\ &= \frac{\frac{25}{49}}{1-\frac{25}{49}}-2\frac{\frac{15}{49}}{1-\frac{15}{49}}+\frac{\frac{9}{49}}{1-\frac{9}{49}}=\frac{16}{85}\\ ||x||_2 &= \frac{4}{\sqrt{85}}\end{aligned}$$

תרגיל: נראה את קיום אי שוויון קושי שוורץ במקרה של L^2.

הוכחה:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f\overline{g}dx,||f||=\sqrt{\langle f,g\rangle}$$

$$\left|\left|\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right|\right|^2 = \int_a^b\left(\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right)^2dx\geq 0$$

$$\int_a^b \left(\frac{|f|^2}{||f||^2} - \frac{2|f||g|}{||f||\,||g||} + \frac{|g|^2}{||g||^2}\right) dx \geq 0$$

$$\int_a^b \frac{|f|\,|g|}{||f||\,||g||} dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|f|^2}{||f||^2} dx + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|g|^2}{||g||^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f|\,|g|\,dx &\leq ||f||\,||g|| \\ \langle |f|, |g| \rangle &\leq ||f||\,||g|| \end{aligned}$$

מתכונת האינטגרציה $\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$ נקבל $|\langle f, g\rangle| \leq ||f||\,||g||$. ■

2 פולינומים אורתוגונליים

2.1 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt

התהליך מייצר סדרה של וקטורים (פונ') אורתוגנליים $\{u_1, ..., u_n\}$ מסדרה של וקטורים (פונ') בת"ל $\{v_1, ..., v_n\}$ כך ש$span\{v_1, ..., v_n\} = span\{u_1, ..., u_n\}$.

התהליך הינו איטרטיבי:

שלב 1: $u_1 = v_1$

שלב 2: $u_2 = v_2 - \tilde{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$.

$\vdots$

שלב n: $u_n = v_n - \tilde{v_n} = v_n - \frac{\langle v_n, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - ... - \frac{\langle v_n, u_{n-1}\rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1}\rangle} u_{n-1}$.

2.1.1 פולינומי לג'נדר

$$P_n[x] = Span\left\{\underset{S_0}{x^0}, ..., \underset{S_n}{x^n}\right\}$$

מכפלה פנימית מוגדרת באופן הבא:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 = S_0(x) \\ P_1(x) &= S_1(x) - \frac{\langle S_1, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = S_1(x) = x \\ & \langle S_1, P_0\rangle = \int_{-1}^{1} x * 1 dx = 0 \\ P_2 &= S_2 - \tilde{S_2} = S_2 - \frac{\langle S_2, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} P_0 - \frac{\langle S_2, P_1\rangle}{\langle P_p, P_p\rangle} P_1 \\ &= \frac{3x^2 - 1}{3} \end{aligned}$$

ע"מ לגרום לפולינומי לג'נדר לקיים תנאי $P_n(1)=1$ נכתוב $P_2=\frac{3}{2}P_2=\frac{3x^2-1}{2}$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{3x^2-1}{2}\\
P_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{2}\\
&\vdots\\
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)
\end{aligned}$$

$$\langle P_n,P_m\rangle=\int_{-1}^{1}P_nP_mdx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}=\delta_{n,m}\frac{2}{2n+1}$$

2.1.2 פולינומי צ'בישב

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}p(x)q(x)dx$$

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2-1\\
T_3(x) &= 4x^3-3x\\
&\vdots\\
T_n(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)...1}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & m=n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

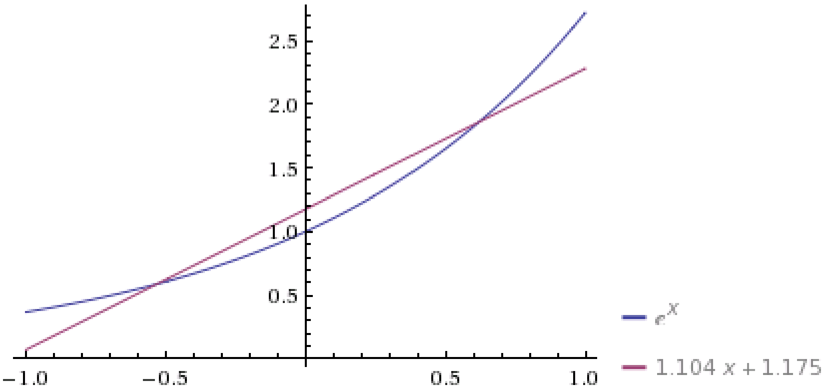
תרגיל:

מצא קירוב ל־$f(x)=e^x$ באמצעות קו ישר בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:** נמצא היטל אורתוגונלי במרחב $Span\{P_0(x),P_1(x)\}$

נחשב $e^x \approx a_0 P_0 + a_1 P_1$ כאשר

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle e^x, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{1}{2}\langle e^x, 1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = 1.175 \\ a_1 &= \frac{\langle e^x, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = ... = 1.104 \end{aligned}$$

לסיכום $e^x \approx 1.175 + 1.104x$



■

הערה 2.1 בהינתן קטע כללי (a,b) נתין להגדיר מ"פ חדשה המותאמת לקטע ובאמצעותה להגדיר מערכת חדשה של פולינומים אורתוגונליים ובאמצעותה לחשב את הקירוב הדרוש.
האפשרות הנוספת היא להגדיר העתקה ליניארית $\varphi : [a,b] \to [-1,1]$ ולהשתמש בה ואז ניתן לעבוד עם מע' אורתוגונלית קיימת.

2.1.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים:

1. Laguerre

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x+1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right) \\ &\vdots \\ (k+1) L_{k+1}(x) &- (2k+1-x) L_k(x) + kL_{k-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

2. פולינומי הרמיט Hermite

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2-2 \\ &\vdots \\ H_{n+1} &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

דוגמא:

$$x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n$$

מקרה א': $0 \le x < 1$, $x^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$

מקרה ב': $x = 1$, $x^n \overset{n\to\infty}{\to} 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

f_n מתכנסת נקודתית לf, נבדוק התכנסות ב$L^2[0,1]$.

$$||x^n - 0|| = \sqrt{\int_0^1 x^{2n}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^1 = \sqrt{\frac{1}{2n-1}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

כלומר $x^n \overset{L^2}{\to} 0$.

דוגמא:

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases} 0 & ,x=0 \\ n & ,0<x\le\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n}<x\le 1 \end{cases} \\ f_n &\overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ ||f_n-0||^2 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2dx = n^2x\Big|_0^{\frac{1}{n}} = n \\ ||f_n-0|| &= \sqrt{n} \not\to 0 \end{aligned}$$

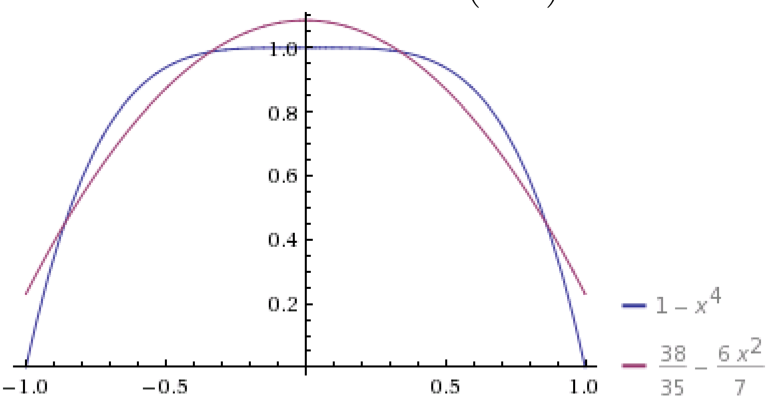
כלומר הסדרה לא מתכנסת ל$f=0$ בL^2.

תרגיל

מצא קירוב ל-$f(x)=1-x^4$ באמצעות פולינום ממעלה 2 בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:**

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)\\
a_i &= \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_i(x)\,dx\\
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)dx=\frac{4}{5}\\
a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)xdx=0\\
a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)\frac{3x^2-1}{2}dx=-\frac{4}{7}
\end{aligned}$$

לסיכום $f(x)\approx\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)=\frac{38-30x^2}{35}$

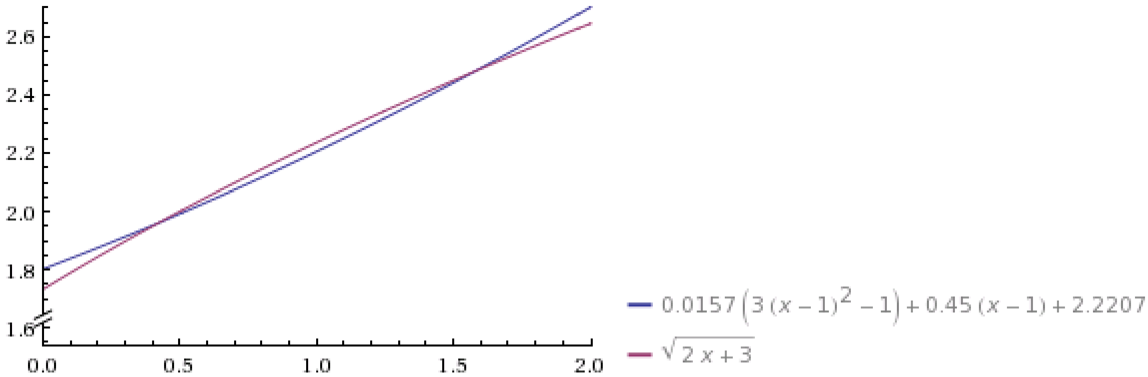


■

תרגיל

מצא קירוב ל-$\sqrt{2x+3}$ $f(x)=$ בקטע $[0,2]$ באמצעות פולינום ממעלה שנייה. **הוכחה:**
נעתיק את הפונקציה מקטע $[0,2]$ לקטע $[-1,1]$ ע"י $t=x-1$, $x=t+1$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2x+3}\\
f(t) &= \sqrt{2t+5}\\
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1*\sqrt{2t+5}dt=2.2207\\
a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t*\sqrt{2t+5}dt=0.45\\
a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3t^2-1}{2}\sqrt{2t+5}dt=0.0314\\
\tilde{f}(x) &= 2.2207+0.45(x-1)+0.0314\frac{3(x-1)^2-1}{2}
\end{aligned}$$



■

חלק III

הרצאה 3

3 מערכת אורתונורמלית אינסופית

הגדרה 3.1 מרחב סגור
תהי $\{e_1, e_2, ...\}$ מע' אורתונורמלית אינסופית במרחב מ"פ V. נאמר שהמערכת הינה סגורה ב־V אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\left|\left|u - \sum_{i=1}^{\infty}\langle u, e_i\rangle e_i\right|\right| = 0$$

טענה 3.2 המע' האורתונורמלית $\{e_1, e_2, ...\}$ סגורה במרחב מ"פ אמ"מ לכל $u \in V$ מתקיים השוויון

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle u, e_i\rangle|^2 = ||u||^2$$

הערה 3.3 השוויון הנ"ל נקרא שוויון פרסבל.

הגדרה 3.4 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ נקראת רציפה למקוטעין, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. ל־f יש לכל היותר מספר סופי של נקודות אי־רציפות.
2. בכל נק' אי־רציפות קיימים הגבולות החד צדדים.

פונ' רציפה למקוטעין מגדירה מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין.

הגדרה 3.5 E מרחב ליניארי של פונקציות הרציפות למקוטעין.
נגדיר מ"פ על מרחב זה:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

נתבונן במע' האינסופית הבאה:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...\right\}$$

נבדוק אורתוגונליות ונורמה של כל איבר

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x\right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos xdx=0\\
\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\sin nx\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi n}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}=0\\
\langle\sin mx,\sin nx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx
\end{aligned}$$

ניתן לפתור בזהות טריגונומטרית $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$ או באינטגרציה בחלקים $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$, נפתור בדרך הראשונה.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(m-n\right)x-cos\left(m+n\right)x\right)dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(m-n\right)x}{m-n}-\frac{\sin\left(m+n\right)}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0\\
\langle\sin mx,\cos nx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx=0\text{ (odd function)}
\end{aligned}$$

בדיקת נורמות:

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right| &= \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx}=\left[\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right]_{-\pi}^{\pi}=1\\
||\sin nx||^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=1\\
||\cos nx||^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=1
\end{aligned}$$

ראינו כי במע' אורתונורמלית אינסופית הקרוב ל$f\in E$ הינו מהצורה $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,e_i\rangle e_j$.

במערכת שהוגדרה ישנם 3 סוגים של איברים:

1. $e_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\langle f,e_n\rangle e_n=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\frac{1}{\sqrt{2}}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx$$

2. $e_n = \sin nx$

$$\langle f, \sin nx \rangle \sin nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \sin nx$$

3. $e_n = \cos nx$

$$\langle f, \cos nx \rangle \cos nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cos nx$$

הגדרה 3.6 טור פוריה:
תהי $f \in E$, הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הינו טור פורייה המתאים ל-f

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad , n = 0, 1, 2, ... \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad , n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

נסמן:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < \pi \\ -2 & , -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

שלבי עבודה: מציאת a_0, a_n, b_n

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2dx + \int_{0}^{\pi} dx\right) = -1 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} \cos nxdx\right) = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} \sin nxdx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & , n\in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n}\right) = \frac{6}{n\pi} & , n\in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

ולכן:

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)} \sin(2n-1)x$$

3.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות.

הגדרה 3.7 פונ' f הינה זוגית אם $f(-x) = f(x)$ ואי זוגית אם $f(-x) = -f(x)$.

3.1.1 תכונות

1. זוגית = זוגית × זוגית
2. אי־זוגית = זוגית × אי־זוגית
3. זוגית = אי־זוגית × אי זוגית

כידוע אם $f(x)$ הינה אי זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$$

ואם $f(x)$ הינה זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

במקרה זה טורי פוריה מוגדרים באופן הבא:

1. עבור $f \in E$ זוגית

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \end{aligned}$$

במקרה זה הטור נקרא "טור קוסינוסים".

2. עבור $f \in E$ אי־זוגית

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

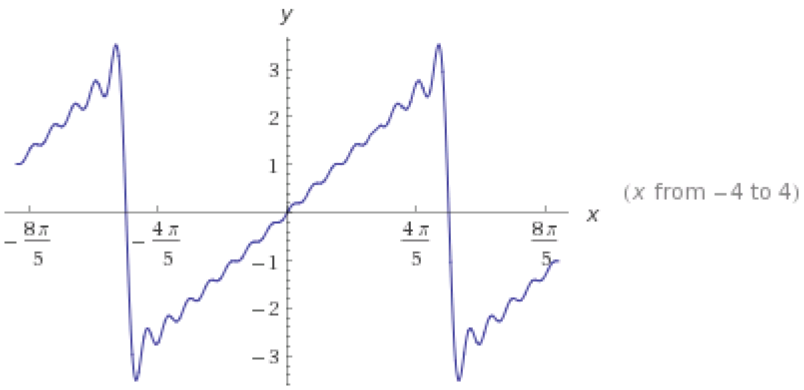
במקרה זה הטור נקרא "טור סינוסים".

דוגמא

נחשב טור פוריה של $f(x) = x$. f הינה אי זוגית $\Leftarrow$ יתקבל טור סינוסים $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{-\pi(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$



3.1.2 תופעת גיבס ־ שגיאה בטור חלקי של טור פוריה

ננתח את הדוגמא האחרונה $f(x)=x$

$$T_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

נתבונן בקטע $[0,\pi]$ נחלק את הרקע ל־m קטעים ונבדוק מהו הערך של T_mבנקודה $x_m=\pi-\frac{\pi}{m}$

$$\begin{aligned}
T_m(x_m) &= \sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)=(*)\\
\sin n\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right) &= \sin n\pi\cos\frac{n\pi}{m}-\cos n\pi\sin\frac{n\pi}{m}\\
&= 0-(-1)^n\sin\frac{n\pi}{m}=(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{m}\\
(*) &= \sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{m}\\
&= \sum_{n=1}^{m}\frac{2}{n}\frac{n\pi}{m}\frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}}\\
&= 2\sum_{n=1}^{m}\frac{\pi}{m}\frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}}
\end{aligned}$$

הגבול של הביטוי האחרון כאשר $m\to\infty$ הינו האינטגרל

$$2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}$$

לפי ההגדרה של סכומי רימן $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_j)\,\Delta x_k$

$$(*)=2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}=2\int_0^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...\right)dx\approx 1.18\pi$$

באופן זה ניתן להאריך של השגיאה היחסית המתקבלת בנק' הקרובה לπ.

$$\frac{1.18\pi-\pi}{2\pi}\approx 0.09=9\%$$

הערה 3.8 ישנה טענה המכלילה את התוצאה האחרונה ולפי טענה זו, גודל השגיאה לא עולה על 9% מגודל הקפיצה בנק' אי רציפות.

תרגיל

נתון $f(x)\in E[-\pi,\pi]$, לכל $a,b,c\in\mathbb{C}$ נגדיר

$$G(a,b,c)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)+a+b\cos x+c\sin x|^2\,dx$$

עבור איזה ערך של a,b,c g מקבלת את ערכה המינימלי?

פתרון

ניתן לתייחס ל$G\left(a,b,c\right)$ כאל $||\;||^2$ של ההפרש בין $f\left(x\right)$ לקירוב שלה באמצעות המערכת $\{1,\cos x,\sin x\}$, כלומר:

$$||f-\left(-a-b\cos x-c\sin x\right)||^2$$

באופן כזה נמצא את:

$$\begin{aligned} -a &= \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx \\ -b &= \frac{\langle f,\cos x\rangle}{\langle \cos x,\cos x\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx \\ -c &= =\frac{\langle f,\sin x\rangle}{\langle \sin x,\sin x\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx \end{aligned}$$

חלק IV

הרצאה 4

4 טורי פוריה מרוכבים

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

ביחס למ"פ זו, המערכת הבאה הינה מע' אורתונורמלית

$$\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

לפי נוסחת אוילר $e^{\pm inx}=\cos nx\pm i\sin nx$

טור פרויה מרוכב המתאים לפונ' $f\in E$ מוגדר באופן הבא:

$$f\left(x\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

כאשר

$$\forall n\in\mathbb{Z}\;:\;c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx$$

נראה שטור פוריה מרוכב שקול לטור פוריה ממשי.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx-i\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\right] \\ &= \frac{a_n-ib_n}{2} \end{aligned}$$

(כאשר a_n, b_n הינם מקדמי פוריה שטור ממשי.)
לפי אותו עקרון:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx} dx = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \\
\Rightarrow & \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = ic_n - c_{-n} \end{cases} \\
f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(\cos nx + i\sin nx) + c_{-n}(\cos nx - i\sin nx)\right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n + c_{-n})\cos nx + i(c_n - c_{-n})\sin nx\right] \\
&= \overbrace{c_0}^{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)
\end{aligned}$$

$.\left(c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\right)$

דוגמא: חישוב טור פוריה מרוכב

$f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
n \neq 0: \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-inx} & v = -\frac{1}{in}e^{-inx} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-x\frac{1}{in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \frac{\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{1}{in}\left(-\frac{1}{in}\right)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{n^2}\right] = \frac{i(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} e^{-in\pi} + e^{in\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi + \cos n\pi + i\sin n\pi = 2\cos n\pi \\ e^{-in\pi} - e^{in\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi - \cos n\pi - i\sin n\pi = -2i\sin n\pi = 0 \end{cases}$$

ולכן עבור $n \neq 0$ $.c_n = \frac{i(-1)^n}{n}$

5 התכנסות נקודתית של טורי פוריה

הגדרה 5.1 E' - מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין $f:[-\pi,\pi]:\mathbb{C}$ כך שבכל נקודה בקטע קיימות הנגזרות החד־צדדיות.

משפט 5.2 משפט דיריכלה
תהי $f\in E'$, מחזורית 2π. בכל נק', בה קיימות הנגזרות החד־צדדיות והן שוות, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס ל־$f(x)$.
בכל נק' אי רציפות, טור הפוריה, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס לממוצע הגבולות החד־צדדים, כלומר ל־$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.
במילים אחרות, אם תנאי המשפט מתקיימים $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$.

הוכחה: כלי עזר:

טענה 5.3 גרעין דיריכלה Dirichlet kernel

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+...+\cos nu=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

הוכחת הטענה:

נסמן את האגף השמאלי ב־S ונכפיל אותו ב־$2\sin\frac{u}{2}$:

$$2S\sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+2\cos u\sin\frac{u}{2}+...+2\cos nu\sin\frac{u}{2}$$

נשתמש בזהות $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

$$\Rightarrow 2S\sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}u-\sin\frac{u}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}u-\sin\frac{3}{2}u\right)+...+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u\right)$$

זהו טור טלסקופי ולכן $2S\sin\frac{u}{2}=\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)u$ ולכן $S=\frac{\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$

תכונה של גרעין דיריכלה:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=1$$

ההתכנסות הנקודתית של טור פוריה הינה ביחס לסדרה של הסכומים החלקיים של טור פוריה. נגדיר סכום חלקי לטור פוריה:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx+b_k\sin kx\right]$$

כאשר המטרה היא להוכיח $f(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{S_n(x)\}$. נציב את מקדמי פוריה המפורשים

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\right]\right]dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}(t-x)\right)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}dt \\
&= \left[\begin{array}{c} u=t-x \\ du=dt \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{2\sin\frac{1}{2}u}du
\end{aligned}$$

$f(x+u)$ הינה פונ' מחזורית וגם $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$ הינה מחזורית (2π). האינטרוול $[-\pi-x,\pi-x]$ גם כן באורך 2π ולכן

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{2\sin\frac{1}{2}u}du$$

לפי תכונת גרעין דיריכלה:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=1$$

נכפיל את שני האגפים ב$f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

כלומר ע"מ להוכיח את ההתכנסות $f(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{S_n(x)\}$ עלינו להוכיח את הדבר הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+u)-f(u)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=0$$

למה 5.4 למת רימן לבג

לכל $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\cos mx dx=\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\sin mx dx=0$$

(כאשר m לא הבכרח טבעית)

נגדיר פונקציה φ באופן הבא:

$$\varphi(u)=\frac{f(x+u)-f(x)}{2\sin\frac{u}{2}}=\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

ניתן לראות ש$\varphi(u)$ הינה אינטגרבילית בהחלט כמכפלה של פונ' אינטגר' בהחלט ופונקציה חסומה ולכן לפי למת לבג מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu=0$$

■

5.1 שימוש במשפט דיריכלה

דוגמא

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

נציב $x=\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{1}\right)\\ &= 2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots}$$

תרגיל

נחשב טור פוריה של x^2:

x^2 הינה פונ' זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ ולכן $b_n=0$.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx\\ &= \begin{bmatrix} u=x^2 & u'=2x\\ v'=\cos nx & v=\frac{\sin nx}{n}\end{bmatrix}\\ &= \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int x\sin nxdx\right]\\ &= \begin{bmatrix} u=x & u'=1\\ v'=\sin nx & v=\frac{-\cos nx}{n}\end{bmatrix}\\ &= \frac{2}{n}\left[0-\frac{2}{n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}dx\right)\right]\\ &= \frac{4}{n\pi}\left[-\pi\frac{(-1)^n}{n}\right]=\frac{4(-1)^n}{n^2}\\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}\end{aligned}$$

לסיכום:

$$\boxed{x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2} \cos nx}$$

הכנס גרף

נשתמש בטור האחרון ונציב $x = \pi$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2} \left(-1\right)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} &= \frac{2\pi^2}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

נציב $x = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^{n+1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

משפט 5.5 התכנסות במ"ש של טור פוריה לפונקציה

אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ ו־$f\left(-\pi\right) = f\left(\pi\right)$ ו־$f' \in E$, אז טור פוריה של f מתכנס במ"ש ל־f על כל הקטע.

הוכחה: $f' \in E$ כלומר f' בעלת טור פוריה.

$$f'\left(x\right) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\right]$$

גם ל־$f\left(x\right)$ יש טור פוריה:

$$f\left(x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

נמצא מהו הקשר בין מקדמי פוריה של f ומקדמי פוריה של f'.

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx\\ &= \begin{bmatrix} u=\cos nx & u'=-n\sin nx\\ v'=f' & v=f\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{\pi}\left. f(x)\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi} + n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left(f(\pi)(-1)^n - \overbrace{f(-\pi)}^{=f(\pi)}(-1)^n + nb_n\right)\end{aligned}$$

עבור $n=0$ $\alpha_0=0$ ובאופן כללי $\alpha_n = nb_n$. באותו אופן:

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = -na_n$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[nb_n\cos nx - na_n \sin nx\right]$$

הערה 5.6 אי שוויון בסל עבור טור פוריה: $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \leq ||f||^2$ כאשר $c_k = \langle f, u_k\rangle$.

הערה 5.7 במקרה שלנו עבור $e_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\langle f, e_n\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2}}dx\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}a_0\right|^2 = \frac{|a_0|^2}{2}$$

הוכחה: עבור $e_n = \cos nx$:

$$|\langle f, e_n\rangle|^2 = |a_n|^2$$

ובאופן דומה עבור $e_n = \sin nx$:

$$|\langle f, e_n\rangle|^2 = |b_n|^2$$

ולסיכום אי־ שוויון בסל עבור טור פוריה מוגדר באופן הבא:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right] \leq ||f||^2$$

נראה שטור פוריה של $f(x)$ מתכנס במ"ש.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n \sin nx\right] \quad \leq \quad \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n|$$

$$\left[\begin{array}{c} |a_n \cos nx| \le |a_n| \\ |b_n \sin nx| \le |b_n| \\ |a_n| \le \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \\ |b_n| \le \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \end{array}\right]$$

$$\le \left|\frac{a_0}{2}\right| + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

נראה שהטור האחרון מתכנס.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2 + \left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right)} \\ &\overbrace{\le}^{\substack{\text{Cauchy} \\ \text{Schwarz}}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} \end{aligned}$$

ולפי אי שוויון בסל $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 \le ||f||^2$ ומצאנו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ בנוסף לכך שידוע שהוא מתכנס ולכן בסה"כ לפי מבחן ההשוואה של וירשטראס הטור שלנו מתכנס במ"ש. ■

■

חלק V

הרצאה 5

6 שוויון פרסבל

טענה 6.1 שוויון פרסבל

לכל $f \in E$ מתקיים השוויון הבא:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

כאשר a_n, b_n מקדמי פוריה של f.

שימוש בשוויון פרסבל - דוגמא

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx &= \frac{\frac{4\pi^4}{9}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \\
\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-\pi}^{\pi}\right] &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi^5}{5}\right] = \frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} &= \frac{8\pi^4}{45}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

טענה 6.2 הגרסה המרוכבת של שוויון פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

כאשר $f \in E$ ו$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הינו טור פוריה המרוכב של $f(x)$.

תרגיל

1. מצאו טור פוריה מרוכב של e^x.
2. מצאו את $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

פתרון

.1

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{(in-1)\pi}}{2\pi(1-in)} \\
&= \left[e^{\pm in\pi} = (-1)^n\right] \\
&= \frac{(-1)^n\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right]}{2\pi(1-in)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{e^x \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[e^{\pi}-e^{-\pi}\right]}{2\pi(1-in)} e^{inx}}$$

.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}$$

מצד שני

$$\sum\left|c_n\right|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)^2}{4\pi^2\left|1-in\right|^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)^2}{4\pi^2\left(1+n^2\right)}$$

ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{4\pi}}{\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)^2}{4\pi^2}}=\frac{\pi\left(e^{\pi}+e^{-\pi}\right)}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\ (=\pi\coth\pi)$$

7 טורי פוריה בקטעים כללים $[a,b]$

הגדרה 7.1 $E\left[a,b\right]$ מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין המקבלות ערכים ב$\mathbb{C}$.

הגדרה 7.2 מכפלה פנימית:

$$\langle f,g\rangle=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

המערכת האורתונורמלית המתאימה היא:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right),\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

7.0.1 מקדמי פוריה

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\\ a_n&=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx\\ b_n&=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx\end{aligned}$$

7.0.2 מקדמי פוריה עבור מרוכבים

$$c_n=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)e^{-i\frac{2n\pi x}{b-a}}dx$$

באופן דומה ניתן לגדיר את האיברים האחרונים עבור קטע כללי סימטרי סביב 0 $[-L,L]$.

במקרה זה טור פוריה ניראה כך:

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_{0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos\frac{n\pi x}{L}+b_{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

כאשר

$$\begin{aligned}a_{n} & = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\ b_{n} & = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\end{aligned}$$

תרגיל

חשב טור פוריה של $f\left(x\right)=x^{2}$ בקטע $[0,2\pi]$.

פתרון

$$\begin{aligned}a_{0} & = \frac{2}{2\pi-0}\int_{0}^{2\pi}x^{2}dx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{x^{3}}{3}\right|_{0}^{2\pi}=\frac{8\pi^{2}}{3}\\ a_{n} & = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x^{2}\cos nxdx=\cdots=\frac{4}{n^{2}}\end{aligned}$$

חלק VI

הרצאה 6

משפט 7.3 שוויון פרסבל מוכלל

לכל $f,g\in E$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx \quad = \quad \frac{a_{0}\overline{c_{0}}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\overline{c_{n}}+b_{n}\overline{d_{n}}$$

כאשר a_n,b_n מקדמי פוריה של f, c_n,d_n מקדמי פוריה של g.

משפט 7.4 אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f\left(-\pi\right)=f\left(\pi\right)$ ו־$f'\in E$ ואם $f\left(x\right)\sim\frac{a_{0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n}\cos nx+b_{n}\sin nx\right]$, אז ניתן לגזור את הטור פוריה של $f\left(x\right)$ איבר איבר

$$f'\left(x\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[\overbrace{-na_{n}}^{b_{n}^{*}}\sin nx+\overbrace{nb_{n}}^{a_{n}^{*}}\cos nx\right]$$

משפט 7.5 (אינטגרציה איבר איבר)

תהי $f\in E\left[-\pi,\pi\right]$, כאשר $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$, אז לכל $x\in\left[-\pi,\pi\right]$ ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר

$$\int_{-\pi}^{x}f\left(t\right)dt\sim\frac{a_0\left(x+\pi\right)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\left(\cos nx-\cos n\pi\right)\right]$$

והטור באגף ימין מתכנס במ"ש לפונקציה באגף שמאל.

הוכחה: נגדיר $g\left(x\right)=\int_{-\pi}^{x}f\left(t\right)dt-\frac{a_0x}{2}$

- $g\left(x\right)$ הינה פונ' רציפה.
- $g'\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{a_0}{2}\Rightarrow g'\in E$
- $g\left(\pi\right)=\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)dt-\frac{a_0\pi}{2}=\pi a_0-\frac{a_0\pi}{2}=\frac{a_0\pi}{2}$
- $g\left(-\pi\right)=\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)dt+\frac{a_0\pi}{2}=\frac{a_0\pi}{2}$
- $g\left(\pi\right)=g\left(-\pi\right)$

כלומר $g\left(x\right)$ מקיימת את התנאים הדרושים להתכנסות במ"ש.

$$g\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos nx+B_n\sin nx\right]$$

$g\left(x\right)$ מקיימת את התנאים הדרושים לגזירה איבר איבר

$$g'\left(x\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[nB_n\cos nx+-nA_n\sin nx\right]$$

מצד שני, ראינו כי $g'\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{a_0}{2}$ ולכן

$$\begin{aligned}f\left(x\right)-\frac{a_0}{2} &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[nB_n\cos nx+-nA_n\sin nx\right]\\ f\left(x\right) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[nB_n\cos nx+-nA_n\sin nx\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{-b_n}{n},\,B_n=\frac{a_n}{n}$$

נציב את המקדמים ל־$g\left(x\right)$:

$$\begin{aligned}g\left(x\right) &= \int_{-\pi}^{x}f\left(t\right)dt-\frac{a_0x}{2}\\ \int_{-\pi}^{x}f\left(t\right)dx &= g\left(x\right)+\frac{a_0x}{2}\\ &= \frac{a_0x}{2}+\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right]\end{aligned}$$

נחשב את $\frac{A_0}{2}$: נציב $x=-\pi$:

$$\begin{aligned} 0 &= g(-\pi)-\frac{a_0\pi}{2}=-\frac{a_0\pi}{2}+\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n}\cos n\pi \\ \frac{A_0}{2} &= \frac{a_0\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos n\pi \end{aligned}$$

נציב $\frac{A_0}{2}$ בחזרה ונקבל את הטור הדרוש:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt=\frac{a_0(x+\pi)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}(\cos nx-\cos n\pi)\right]$$

■

הערה 7.6 ניתן לבחור בגבול תחתון כל נקודה a

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt=\frac{a_0(x-a)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}(\sin nx-\sin na)-\frac{b_n}{n}(\cos nx-\cos na)\right]$$

8 המשכה זוגית ואי־זוגית

אם אנו נדרשים למצוא טור פוריה המתכנס במ"ש ל־$f(x)$ בקטע $[0,\pi]$, נעדיף להמשיך את $f(x)$ באופן שונה. במקרה זה נמצא טור של ההמשכה הזוגית של $f(x)$.

עבור ההמשכה הזוגית נקבל פונקציה שתקבל את הדרישות בנוגע להתכנסות במ"ש והיא גם תתלכד עם הפונקציה המקורית בקטע הדרוש ולכן טור פוריה של ההמשכה הזוגית יתכנס במ"ש גם לפונקציה המקורית בקטע הנתון.

באופן דומה ניתן להגדיר המשכה אי זוגית.

הגדרה 8.1 תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[0,\pi]$, נגדיר פונקציה f_{even} (המשכה זוגית) לקטע $[-\pi,0]$ באופן הבא:

$$f_{even}=\begin{cases} f(x) & ,0\le x\le\pi \\ f(-x) & ,-\pi\le x\le 0\end{cases}$$

לפי מה שראינו קודם, טור פוריה של f_{even} הינו מהצורה

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

כאשר $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$

באופן דומה נגדיר f_{odd} בקטע $[-\pi,\pi]$ (ההמשכה האי־זוגית)

$$f_{odd}=\begin{cases} f(x) & ,0<x\le\pi \\ 0 & ,x=0 \\ -f(-x) & ,-\pi\le x<0\end{cases}$$

f_{odd} הינה אי זוגית ולכן

$$\begin{aligned} f_{odd} &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}$$

<u>הערה:</u> רציפות ב־0 תבטיח התכנסות במ"ש.

דוגמא

$$f(x) = \sin(x), x \in [0,\pi]$$

ההמשכה האי־זוגית מתלכדת עם הפונקציה עצמה ($\sin x$).
ההמשכה הזוגית של $\sin x$ לקטע $[-\pi, 0]$ היא $|\sin x|$.

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx$$

תרגיל

נתונה פונקציה $f(t) = \begin{cases} 1 & ,0 \le t \le 1 \\ 2-t & ,1 \le t \le 2 \end{cases}$.
נחשב טור סינוסים וטור קוסינוסים של $f(t)$.

1. טור סינוסים: $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\left[\int_0^1 1\sin\frac{n\pi}{2}tdt + \int_1^2 (2-t)\sin\frac{n\pi}{2}tdt\right] \\ &= \cdots = \frac{2}{n\pi} + \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2} \end{aligned}$$

לסיכום

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n} - \frac{2(-1)^n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}t\right)}{\pi(2n-1)^2}\right]$$

2. טור קוסינוסים: $b_n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 dt + \int_1^2 (2-t)dt = \frac{3}{2} \\ a_n &= \int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2}tdt + \int_1^2 (2-t)\cos\frac{n\pi}{2}tdt \\ &= \cdots = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi}{2}t}{n^2}$$

תרגיל

נתונה $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$ כך ש$\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=0$. $F\left(x\right)$ היא פונקציה קדומה של $f\left(x\right)$ ונתון ש־$\int_{-\pi}^{\pi}F\left(x\right)dx=1$. הבע את ערך האינטגרל

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^{2}F\left(x\right)dx$$

באמצעות מקדמי פוריה a_{n},b_{n} של $f\left(x\right)$.

פתרון

נשתמש בשוויון פרסבל מוכלל. מהנתון נובע ש־

$$a_{0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=0$$

ולכן

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n}\cos nx+b_{n}\sin nx\right]$$

ע"פ משפט האינטגרציה (שבו ניתן לבצע גם אינטגרציה "לא מסויימת")

$$F\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_{n}}{n}\cos nx+\frac{a_{n}}{n}\sin nx\right]+C$$

כאשר $C=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left(x\right)dx=\frac{1}{2\pi}$
לסיכום

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_{n}}{n}\cos nx+\frac{a_{n}}{n}\sin nx\right]$$

ידוע כי

$$x^{2}=\frac{\pi^{2}}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^{2}}\cos nx$$

ע"פ שוויון פרסבל מוכלל נקבל:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{2}F\left(x\right)dx & = \frac{\left[\frac{1}{\pi}\frac{2\pi^{2}}{3}\right]}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^{2}}\left(\frac{-b_{n}}{n}\right)\\ & = \frac{\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^{n+1}b_{n}}{n^{3}}\end{aligned}$$

דוגמא

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n} \sin nx$$

נבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) + \overbrace{K}^{\frac{a_0}{2}} \\
K &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \cdots = \frac{\pi^2}{6} \\
x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^2} \cos nx + \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

דוגמא

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} t^2 dt &= \int_{-\pi}^{x} \left[\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^2} \cos nt\right] dt \\
\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-\pi}^{x} &= \left.\frac{\pi^2}{3} t\right|_{-\pi}^{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^2} \left.\frac{\sin nt}{n}\right|_{-\pi}^{x} \\
\frac{x^3+\pi^3}{3} &= \frac{\pi^2\left(x+\pi\right)}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^3} \sin nx
\end{aligned}$$

$$\boxed{x\left(x^2-\pi^2\right) = x^3 - \pi^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\left(-1\right)^{n}}{n^3} \sin nx}$$

תרגיל

תהי $f = \min\left\{1, |x|\right\}$. נחשב את מקדמי פוריה a_n, b_n של טור פוריה של $f\left(x\right)$ בקטע $[-2, 2]$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x dx + \int_1^2 dx = \frac{3}{2} \\
a_n &= \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \cdots = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & ,n = 4k+3 \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} & ,n = 4k+2 \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & ,n = 4k+1 \\ 0 & ,n = 4k \end{cases}
\end{aligned}$$

9 שימוש בטורי פוריה עבור מד"ח

9.0.3 משוואת חום

התפלגות הטמפרטורה במוט שאורכו $2L$

$$u_t - ku_{xx}$$

או

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & -L < x < l \\ u(x,0) = f(x) & -L \le x \le L \\ u(-L,t) = u(L,t) & 0 \le < \infty \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) & 0 \le t < \infty \end{cases}$$

בסופו של תהליך הפתרון נקבל פונ' $u(x,t)$ שמספקת התפלגות הטמפרטורה בכל נק' x של המוט (לכל אורכו) ובכל נק' בזמן t.
השיטה לפתרון המשווהא מבוססת על שימוש בטורי פורייה ונקראת "שיטת הפרדת משתנים". רעיון השיטה הוא בהפרדה של משתנה x ומשתנה t ומציאת הפתרון בצורה הבאה:

$$U(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

כאשר $X(x)$ אינה תלויה ב$T(t)$. ננסח את המשוואה בהתאם להנחה:

$$\begin{aligned} U_t(x,t) &= X(x)\cdot T'(t) \\ U_{xx}(x,t) &= X''(x)\cdot T(t) \end{aligned}$$

נציב את הנגזרות בחזרה למשוואה:

$$\begin{aligned} X(x)\cdot T'(t) &= k\cdot X''(x)\cdot T(t) \\ \frac{T'(t)}{k\cdot T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \end{aligned}$$

הערה 9.1 בוחרים את $(-\lambda)$ כי במקרה של λ, תנאי השפה אנם מתקיימים. לדוגמה: אם $\frac{x''}{x}=\lambda$ אזי:

$$X''-\lambda x=0\Rightarrow k^2-\lambda=0\Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$$

אז הפתרון הרצוי הוא מהצורה:

$$X=A\cdot e^{\sqrt{\lambda}x}+B\cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

מהגדרת תנאי השפה $U(-L,t)=U(L,t)$. נקבל תנאי שפה עבור ה$X(x)$.

$$\begin{aligned} X(-L)\cdot T(t) &= X(L)\cdot T(t) \\ \Rightarrow X(-L) &= X(L) \end{aligned}$$

ניתן לראות כי $X=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ אינו מקיים תנאי שפה זה.

$$X(L)=A\cdot e^{\sqrt{\lambda}\cdot L}+B\cdot e^{-\sqrt{\lambda}L}\neq Ae^{-\sqrt{\lambda}L}+Be^{\sqrt{\lambda}L}$$

ולכן נבחר ב$(-\lambda)$:

$$\Rightarrow\frac{x''}{x}=-\lambda\Rightarrow\begin{array}{c} x''+\lambda x=0 \\ k^2+\lambda=0 \\ k_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}\end{array}$$

$$\Rightarrow X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

נבדוק מתי תנאי השפה מתקיימים:

$$\begin{array}{rcl} X(-L) &=& X(L) \\ X(-L) &=& A\cos\sqrt{\lambda}L-B\sin\sqrt{\lambda}L=A\cos\sqrt{\lambda}L+B\sin\sqrt{\lambda}L \\ 2b\cdot\sin\sqrt{\lambda}L &=& 0 \\ \swarrow & & \searrow \\ B=0 & & \sin\sqrt{\lambda}L=0 \\ & & \sqrt{\lambda}L=n\pi \\ & & \boxed{\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{L}} \\ & & \boxed{\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{L^2}} \end{array}$$

עבור $\lambda_0=0$ נקבל כי

$$\begin{aligned} X''(x) &= 0 \\ X'(x) &= c_1 \\ X(x) &= c_1x+c_2 \end{aligned}$$

נציב שוב את תנאי השפה:

$$\begin{aligned} X(-L) &= X(L) \\ \Rightarrow X(-L) &= -C_1L+C_2=C_1L+C_2=X(L)\Rightarrow C_1=0 \end{aligned}$$

נציב תנאי שפה שני $X'(-L)=X'(L)$:

$$\Rightarrow X'(x)=c_1 \Rightarrow X'(\pm L)=c_1$$

כלומר עבור $\lambda_0=0$ נקבל פתרון $X(x)=c$. עבור $\lambda_n=\frac{\pi^2 n^2}{L^2}$ $n\neq 0$ נקבל: (לאחר הצבה במד"ר שהתקבל).

$$X\left(x\right)=C_1\cos\frac{n\pi}{L}x+C_2\sin\frac{n\pi}{L}x$$

נציב תנאי שפה:

$$X\left(-L\right)=X\left(L\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad X\left(L\right) &= C_1\cos n\pi+C_2\sin n\pi\\ &= C_1\cos n\pi-C_2\sin n\pi=X\left(-L\right)\end{aligned}$$

$$2C_2\sin n\pi=0$$

$\Leftarrow$ אין הגבלה בנוגע לC_2.

עבור $\lambda\neq 0$:

$$\begin{aligned}X''\left(x\right)+\frac{n^2\pi^2}{L^2}X\left(x\right) &= 0\\ \Rightarrow X\left(x\right) &= C_1\cos\frac{n\pi}{L}x+C_2\sin\frac{n\pi}{L}x\end{aligned}$$

בדיקת תנאי שפה $\begin{cases}X\left(-L\right)=X\left(L\right)\\ X'\left(-L\right)=X'\left(L\right)\end{cases}$

תנאי 1:

$$\begin{aligned}X\left(L\right) &= C_1\cancel{\cos n\pi}+C_2\sin n\pi\\ &= C_1\cancel{\cos n\pi}-C_2\sin n\pi=X\left(-L\right)\\ C_2\sin n\pi &= 0\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ אין מגבלה בנוגע ל-C_2.

חלק VII

הרצאה 7

באופן דומה נבדוק תנאי 2:

$$\begin{aligned}X'\left(x\right) &= -C_1\sin\frac{n\pi}{L}x*\frac{n\pi}{L}+C_2\cos\frac{n\pi}{L}x*\frac{n\pi}{L}\\ \Rightarrow X'\left(L\right) &= -C_1\sin n\pi*\frac{n\pi}{L}x+C_2\cos n\pi*\frac{n\pi}{L}\\ & C_1\sin n\pi*\frac{n\pi}{L}+C_2\cos n\pi*\frac{n\pi}{L}=X'\left(-L\right)\\ \Rightarrow 2C_1\frac{n\pi}{L}\sin n\pi &= 0\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ אין מגבלה בנוגע ל-C_1.

מסקנת ביניים

הפתרון הכללי של המד"ר $X''+\lambda x=0$ מורכב משני רכיבים:

$$\begin{aligned} X_n &= \cos\frac{n\pi}{L}x \\ X_n^* &= \sin\frac{n\pi}{L}x \end{aligned}$$

ובנוסף עבור $\lambda_0=0$ מצאנו כי הרכיב המתאים הינו $X_0=1$.
בשלב זה נעבור למד"ר השניה $T'(t)+k\lambda T(t)=0$

$$\begin{aligned} m+k\lambda &= 0 \\ \Rightarrow m &= -k\lambda \\ \Rightarrow T_n(t) &= e^{-k\lambda t}=e^{-k\lambda_n t} \end{aligned}$$

לסיכום הפתרון הכללי של מד"ח יהיה מורכב משני רכיבים עיקריים:

$$\begin{aligned} U_n(x,t) &= X_n(x)\,T_n(t)=e^{-k\lambda_n t}\cos\frac{n\pi}{L}x \\ U_n^*(x,t) &= X_n^*(x)\,T_n(t)=e^{-k\lambda_n t}\sin\frac{n\pi}{L}x \end{aligned}$$

ומרכיב המתקבל עבור $\lambda_0=0$:

$$U_0(x,t)=1$$

ולכן הפתרון הכללי של מד"ח הינו הצירוף הליניארי של כל הרכיבים האלה:

$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-k\lambda_k t}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right]$$

נחשב סדרה של $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, לשם כך נשתמש בתנאי התחלה:

$$u(x,0)=f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right]$$

כלומר התקבל טור פוריה של $f(x)$ וידוע ש־

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx \end{aligned}$$

ובכך מצאנו את הפתרון עבור המד"ח הנתונה.

9.0.4 מד"ח נוספת ־ משוואת מיתר

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

$u(x,t)$ - פונ' המתארת את תנועת המיתר הקשור בשני קצותיו $(0,L)$ כאשר תנאי התחלה הם:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \Psi(x) \end{aligned}$$

$\Psi(x)$ מהירות התחלתית של המיתר.

תנאי שפה:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

שלבי פתרון:

$$\begin{aligned} \frac{T''(t)}{a^2T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \swarrow \qquad & \qquad \searrow \\ T''(t) = -\lambda a^2 T(t) \qquad & \qquad X''(x) = -\lambda X(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & 1. \quad X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \\ & 2. \quad T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}x + D\sin a\sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

בדיקת תנאי שפה:

$$\begin{aligned} X(0) &= A = 0 \\ X(L) &= A\cos\sqrt{\lambda}L + B\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \\ &\Rightarrow B\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \\ &\Rightarrow X_n(x) = B\sin\frac{n\pi}{L}x \end{aligned}$$

ולכן בסה"כ

$$\begin{aligned} U_n(x,t) &= \sin\frac{n\pi}{L}x\left[a_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right] \\ \Rightarrow & \boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t)} \\ & \boxed{= \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right]\sin\frac{n\pi}{L}x} \end{aligned}$$

נחשב את סדרת המקדמים a_n, b_n באמצעות תנאי ההתחלה.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{L}x \\ &\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdt} \end{aligned}$$

נציב את תנאי ההתחלה השני:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \Psi(x)\\ \Rightarrow\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{an\pi}{L}b_n}_{b_n^*}\sin\frac{n\pi}{L}x=\Psi(x)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\frac{an\pi}{L}b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L\Psi(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx\\ \Rightarrow &\quad \boxed{b_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^L\Psi(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx}\end{aligned}$$

תרגיל

נתון מיתר המקובע בקצוות $x=0,x=L$. ברגע התחלתי $(t=0)$ המיתר בעל צורה המתוארת ע"י פונ' $\varphi(x)=\frac{4h}{L^2}x(L-x)$. בנוסף $\Psi(x)=0$ (אין מהירות התחלתית). מצא את $u(x,t)$.

פתרון

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\ &= \frac{8L}{L^3}\int_0^L\left(Lx-x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\ &= \cdots=\frac{16h}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\\ b_n &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32h}{\pi^3(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{L}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{L}}$$

10 בעיות שפה - מע' שטרום ליוביל (ש. ל.)

משוואת ש. ל. הינה מד"ר מסדר שני.

מד"ר כללית מסדר 2:

$$\begin{aligned}P_2(x)y''+P_1(x)y'+P_0(x)y &= 0\\ L[y] &\overset{?}{=} \lambda y\end{aligned}$$

סדרת λ_n ו־φ_n המקיימת את המשוואה $L[\varphi_n]=\lambda_n\varphi_n$ נקראת מע' של ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות (בהתאמה).

הגדרה 10.1 בעיית שפה

$$a \le x \le b \qquad \left(-py'\right)' + qy = \lambda \rho y$$

עם תנאי שפה הבאים

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{cases}$$

נקראת בעיית שטרום ליוביל כאשר p, q, ρ רציפות ממשיות ו־p' הינה גזירה ברציפות.

טענה 10.2 כל מד"ר מסדר שני ניתן להצגה לפי צורת ש. ל.

הוכחה:

$$p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = \lambda y$$

במטרה להגיע לצורה של ש. ל. נבצע השוואת מקדמים.
נגזור את המד"ר ש. ל.

$$\rho \ne 0 \qquad -p'y' - py'' + qy = \lambda \rho y \ / : p$$

$$-\frac{p}{\rho} y'' + \frac{-p'}{\rho} y' + \frac{q}{\rho} y = \lambda y$$

נשווה מקדמים של y', y''.

$$y'' : \qquad p_2 = -\frac{p}{\rho}$$

$$y' : \qquad p_1 = -\frac{p'}{\rho}$$

$$\rho = -\frac{p'}{p_1}$$

$$-p_2 \rho = p$$

$$-p_2 \left(-\frac{p'}{p_1}\right) = p$$

$$p p_1 = p_2 p'$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{p_1}{p_2} \qquad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{p} = \frac{p_1}{p_2} dx$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{p_1}{p_2} dx$$

$$\ln p = \int \frac{p_1}{p_2} dx + C$$

$$\Rightarrow \boxed{p = Ce^{\int \frac{p_1}{p_2} dx}}$$

לאחר מציאת p נמצא את $\rho = \frac{-p}{p_2}$. ■

הגדרה 10.3 המשך ההגדרה:

- תנאי שפה $y(b) = 0, y(a) = 0$ נקראים תנאי דיריכלה.
- תנאי שפה $y'(a) = 0, y'(b) = 0$ נקראים תנאי ניומן.

- הפתרון של בעיית ש.ל. מתקבל במונחים של פונקציות עצמיות ϕ_n וע"ע λ_n.
- לכל ע"ע λ_i מתאימה פונקציה עצמית ϕ_i אחת ויחידה.
- עבור שני ע"ע λ_1, λ_2 מתקבלות פונ' עצמיות $\phi_1(x), \phi_2(x)$ אורתוגונליות ביחס למ"פ

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_a^b \phi_1(x)\,\phi_2(x)\,\rho dx = 0$$

10.0.5 שוויון לגרנז'

יהיו u, v שתי פונ' המוגדרות על $a \le x \le b$ ובעלות נגזרת שניה, במקרה זה

$$\int_a^b L[u]\,v dx = \int_a^b L[v]\,u dx$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\int_a^b L[u]\,v dx &= \int_a^b \Big(-(pu')' - qu\Big)\,v dx \\
&= -\int_a^b (pu')'\,v dx - \int_a^b q\cdot u\cdot v dx \\
&= -(pu')\,v\big|_a^b + \int_a^b pu'v' dx - \int_a^b quv dx \\
&= -pu'v\big|_a^b + puv'\big|_a^b - \int_a^b u\,(pv')\,dx - \int_a^b quv dx \\
&= -p\,(u'v - uv')\big|_a^b + \int_a^b \Big(-(pv')' - qv\Big)\,u dx \\
\Rightarrow \int_a^b L[u]\,v dx &= \underbrace{-p\,(u'v - v'u)\big|_a^b}_{(*)} + \int_a^b L[v]\,u dx
\end{aligned}$$

נפעיל תנאי שפה על u ו־v.

$$\begin{cases} a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0 \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

וגם

$$\begin{cases} a_1 v(a) + a_2 v'(a) = 0 \\ b_1 v(b) + b_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

עבור $a_2 \ne 0, b_2 \ne 0$

$$\begin{cases} u'(a) = -\frac{a_1}{a_2} u(a) \\ u'(b) = -\frac{b_1}{b_2} u(b) \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} v'(a) = -\frac{a_1}{a_2} v(a) \\ v'(b) = -\frac{b_1}{b_2} v(b) \end{cases}$$

נחשב את $(*)$:

$$\begin{aligned}
-p\,(u'v - v'u)\big|_a^b &= -p(b)\left[u'(b)\,v(b) - v'(b)\,u(b)\right] + p(a)\left[u'(a)\,v(a) - v'(a)\,u(a)\right] \\
&= -p(b)\left[-\frac{b_1}{b_2}u(b)\,v(b) + \frac{b_1}{b_2}v(b)\,u(b)\right] + p(a)\left[-\frac{a_1}{a_2}u(a)\,v(a) + \frac{a_1}{a_2}v(a)\,u(a)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b L[u]\, v dx = \int_a^b L[v]\, u dx$$

כעת ניתן להראות את האורתוגונליות של פונקציות עצמיות: ■

משפט 10.4 יהיו ϕ_1, ϕ_2 שתי פונ' עצמיות של בעיית ש.ל.

$$\begin{cases} (p(x)\, y')' + q(x)\, y + \lambda\rho(x)\, y = 0 \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

במקרה זה

$$\int_a^b \phi_1(x)\, \phi_2(x)\, \rho dx = 0$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} L[\phi_1] &= \lambda_1\rho\phi_1 \\ L[\phi_1] &= \lambda_2\rho\phi_2 \end{aligned}$$

לפי שוויון לגרנז'

$$\begin{aligned} \int_a^b L[\phi_1]\, \phi_2 dx &= \int_a^b L[\phi_2]\, \phi_1 dx \\ \Rightarrow \int_a^b \lambda_1\rho\phi_1\phi_2 dx &= \int_a^b \lambda_2\rho\phi_2\phi_1 dx \\ \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \rho\phi_1\phi_2 dx &= 0 \end{aligned}$$

עבור $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\int_a^b \rho\phi_1\phi_2 dx = 0$$

■

תרגיל

נתונה מע' הבאה:

$$p = 1 \qquad \rho = 1 \qquad q = 0 \qquad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases}$$

מקרה 1: $\lambda = 0$

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$$

נציב תנאי שפה:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\quad\Rightarrow\quad C_2 = 0 \\ y'(L) = 0 &\quad\Rightarrow\quad C_1 = 0 \end{aligned}$$

מקרה 2: $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} k^2 + \lambda = 0 \qquad & k^2 = -\lambda \\ & k = \pm i\sqrt{\lambda} \\ \Rightarrow \quad y(x) \quad & = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

תנאי שפה:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ &\Rightarrow y(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \\ & \quad\; y'(x) = C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \\ y'(L) &= 0 \\ &\Rightarrow C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L = 0 \\ & \quad\; C_2 \neq 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}L = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}L &= \frac{(2n+1)\pi}{2} \\ \Rightarrow \quad \lambda_n &= \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 \end{aligned}$$

לסיכופם קיבלנו סדרה של ע"ע λ_n וסידרה מתאימה של פונקציות העצמיות

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

חלק VIII
הרצאה 8

11 התמרות פוריה

$$X(t) = a\sin\overbrace{2\pi f t}^{\omega_0}$$

f זמן תדירות, לדוגמא 50.

$T=\frac{1}{f}$ זמן מחזור

$$X(t) = a\sin\omega_0 t$$
$$e^{i\omega_0 t}$$

אנחנו נעסוק בשימושים מתמטיים (אינטגרלים לא אמיתיים, מד"ח).

הגדרה 11.1 $G(\mathbb{R})$ - מרחב פונקציות המוגדרות על $\mathbb{R}$ המקבלות ערכים ב-$\mathbb{C}$, רציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט.

הגדרה 11.2 התמרת פוריה.
תהי $f\in G(\mathbb{R})$, פונקציה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

נקראת התמרת פוריה של $f(x)$.
הסימון המקובל:

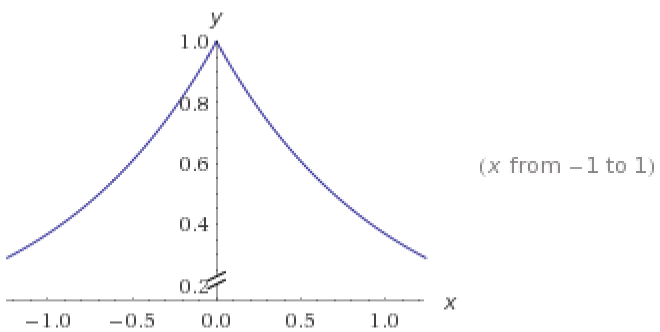
$$\mathcal{F}[f](\omega)$$
$$F(\omega)$$
$$\widehat{f(\omega)}$$

11.0.6 תכונות של התמרת פוריה

- $F(\omega)$ מוגדרת לכל $\omega\in\mathbb{R}$.
- $F(\omega)$ הינה רציפה לכל $\omega\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty} F(\omega)=0$

דוגמא:

נחשב התמרת פוריה של $e^{-|x|}$



$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-x-i\omega x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x-i\omega x}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{L\to\infty}\left.\frac{e^{x(-1-i\omega)}}{-1-i\omega}\right|_{0}^{L} + \lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right|_{-M}^{0}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-i\omega+1+i\omega}{(1+i\omega)(1-i\omega)}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+\omega^2} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}
\end{aligned}$$

חישוב עזר:

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty}\frac{e^{L}e^{-i\omega L}}{-1-i\omega} &= 0 \\
\lim_{M\to\infty}\frac{e^{Mi\omega}e^{-M}}{1-i\omega} &= 0
\end{aligned}$$

לסיכום:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}}$$

דוגמא נוספת

נחשב התמרת פוריה של

$$f(x) = \begin{cases} \sin x e^{-x} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,x\leq 0 \end{cases}$$

דרך א': שימוש ישירות בהגדרה:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \sin x e^{-x-i\omega x}dx
\end{aligned}$$

לפי אינטגרציה בחלקים.
דרך ב':שימוש באקספוננט קומפלקסי:

שימוש ב $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}e^{-x-i\omega x}dx-\int_0^\infty e^{-ix-x-i\omega x}dx\right]\\
&= \frac{1}{4\pi i}\left[\left.\frac{e^{-x(-i+1+i\omega)}}{-(-i+1+i\omega)}\right|_0^\infty-\left.\frac{e^{-x(i+1+i\omega)}}{-(i+1+i\omega)}\right|_0^\infty\right]\\
&= \frac{1}{4\pi i}\left[\frac{1}{-i+1+i\omega}-\frac{1}{i+1+i\omega}\right]\\
&= \frac{1}{4\pi i}\left[\frac{1+i\omega+i-1-i\omega+i}{(1+i\omega)^2+1}\right]\\
&= \frac{2i}{4\pi i\left((1+i\omega)^2+1\right)}=\frac{1}{2\pi\left[(1+i\omega)^2+1\right]}
\end{aligned}
$$

דוגמא

נחשב את התמרת פוריה של $f(x)=e^{-x^2}$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-i\omega x}dx$$

נגזור את $F(\omega)$:

$$
\begin{aligned}
F'(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-i\omega x}dx\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(-ix)e^{-i\omega x}dx\\
&= \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(-2x)e^{-i\omega x}dx\\
&= \begin{bmatrix} u=e^{-i\omega x} & u'=-i\omega e^{-i\omega x}\\ v'=-2xe^{-x^2} & v=e^{-x^2}\end{bmatrix}\\
&= \frac{i}{4\pi}\left[\underbrace{\left.e^{-x^2}e^{-i\omega x}\right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(-i\omega)e^{-i\omega x}dx\right]\\
&= -\frac{\omega}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx\\
&= \frac{-\omega}{2}\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx}^{F(\omega)}
\end{aligned}
$$

קיבלנו מדר:

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= \frac{-\omega}{2}F(\omega) \\ \frac{dF(\omega)}{d\omega} &= -\frac{\omega}{2}F(\omega) \\ \frac{dF(\omega)}{F(\omega)} &= -\frac{\omega}{2}d\omega \\ \ln F(\omega) &= -\frac{\omega^2}{4}+C \\ F(\omega) &= Ce^{-\frac{\omega^2}{4}} \end{aligned}$$

נחשב את C:

$$F(0)=C=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

לסיכום:

$$\boxed{F(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}}$$

11.0.7 תכונות נוספות

1. ליניאריות: לכל $f,g\in G(\mathbb{R})$ ולכל $a,b\in\mathbb{C}$

$$\mathcal{F}[af+bg](\omega)=a\mathcal{F}[a](\omega)+b\mathcal{F}[b](\omega)$$

2.

(א) עבור f ממשית וזוגית מתקיים $F(-\omega)=F(\omega)$ ו-F הינה ממשית.

(ב) עבור f ממשית ואי־זוגית $F(-\omega)=-F(\omega)$ מדומה טהורה.

(ג) עבור f ממשית $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$.

(ד) עבור f מדומה טהור $F(-\omega)=\overline{-F(\omega)}$

3. תכונת ההזזה, תהי $f\in G(\mathbb{R})$ ו־$a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$ אז

$$\mathcal{F}[f(ax+b)](\omega)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

4. כפל באקספוננט: לכל $f\in G(\mathbb{R})$ ולכל $c\in\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}\left[e^{icx}f(x)\right](\omega)=\mathcal{F}[f](x-c)$$

5. התמרת נגזרת:
תהי f גזירה כך ש$f,f'\in G(\mathbb{R})$ ו־$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, אז

$$\mathcal{F}[f'](\omega)=i\omega\mathcal{F}[f](\omega)$$

(א) הכללה לנוסחת הנגזרת מסדר n:

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\omega)=(i\omega)^n\mathcal{F}[f](\omega)$$

6. "מומנט"
תהי $f\in G(\mathbb{R})$ כך ש־$\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|\,dx$ מתכנס, אז התמרת פוריה של $f(x)$ גזירה ברציפות ומתקיים השוויון הבא:

$$\mathcal{F}[xf(x)](\omega)=i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega)$$

ובאופן כללי:

$$\mathcal{F}[x^nf(x)](\omega)=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}[f](\omega)$$

הוכחות והסברים

(א)

$$F(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{i\omega x}dx$$

נבצע החלפת משתנים $x=-y,dx=-dy$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}f(-y)\,e^{-i\omega y}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,e^{-i\omega y}dy=F(\omega)$$

$F(\omega)$ הינה ממשית בגלל שהאינטגרל של $f(y)\sin\omega y$ מתאפס.
(ג)

$$\begin{aligned}
F(-\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{i\omega x}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,[\cos\omega x+i\sin\omega x]\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)\,[\cos\omega x-i\sin\omega x]}dx\\
&= \overline{F(\omega)}
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f\left(ax+b\right)\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(ax+b\right)e^{-i\omega x}dx \\
&= \begin{bmatrix} y=ax+b & dy=adx \\ ax=y-b & dx=\frac{dy}{a} \\ x=\frac{y-b}{a} & \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(y\right)e^{-i\omega\left(\frac{y-b}{a}\right)}\frac{dy}{y} \\
&= \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(y\right)e^{i\frac{\omega}{a}y}dy \\
&= \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\mathcal{F}\left[f\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

מקרים מיוחדים:

1. $a\neq 0, b=0$

$$\mathcal{F}\left[f\left(ax\right)\right](\omega)=\frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left[f\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

2. $a=1$

$$\mathcal{F}\left[f\left(x+b\right)\right](\omega)=e^{i\omega b}\mathcal{F}\left[f\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

.4

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{icx}f\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{icx-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{i(\omega-c)x}dx \\
&= \mathcal{F}\left[f\right](\omega-c)
\end{aligned}$$

.5

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f'\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'\left(x\right)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{\substack{L\to\infty \\ M\to-\infty}} e^{-i\omega x}f\left(x\right)\Big|_{M}^{L} - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\left(-i\omega\right)e^{-i\omega x}dx\right] \\
&= i\omega\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx \\
&= i\omega\mathcal{F}\left[f\right](\omega)
\end{aligned}$$

דוגמאות

.1

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow F(\omega) \\ f'(x) &\rightarrow i\omega F(\omega) \\ xf(x) &\rightarrow iF'(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2} \\ f'(x) &= -2xe^{-x^2} = -2xf(x) \end{aligned}$$

נתמיר את שני האגפים:

$$i\omega F(\omega) = -2iF'(\omega)$$

(הגענו למד"ר שראינו קודם בדרך אחרת: $F'(\omega) = -\frac{\omega}{2}F(\omega)$)

2. מצאנו כי

$$f(x) = e^{-x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

נחשב התמרה של

$$g(x) = e^{-4x^2-4x-1} = e^{-(2x+1)^2} = f(2x+1)$$

$$\begin{aligned} f(ax+b) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ \Rightarrow g(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}e^{\frac{i\omega}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}e}e^{-\frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{4}} \end{aligned}$$

3. נחשב את ההתמרה של

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , -a \le x \le a \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} 1e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right|_{-a}^{a} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}{-i\omega}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{2i\sin\omega a}{i\omega} = \frac{\sin a\omega}{\pi\omega} \end{aligned}$$

אם נרצה לחשב את ההתמרה של $f_1(x) = \begin{cases} x & , -a \le x \le a \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$ אז ניתן להשתמש בתכונת המומנט

$$\begin{aligned} f(x) &\to F(\omega) \\ f_1(x) = xf(x) &\to i\frac{d}{d\omega}F(\omega) \\ \Rightarrow xf(x) &\to i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sin a\omega}{\pi\omega}\right) \end{aligned}$$

חלק IX

הרצאה 9

12 התמרת פוריה הפוכה

משפט 12.1 אם $f \in G(\mathbb{R})$, אז בכל נק' $x \in \mathbb{R}$ בה קיימות הנגזרות החד־צדדיות מתקיים השוויון

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

הערה 12.2 אם $f \in G(\mathbb{R})$, f רציפה ו־f' רציפה למקוטעין, אז

$$f(x) = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

אם בנוסף גם $\mathcal{F}[f](\omega) \in G(\mathbb{R})$ אז

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)e^{-i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega(-x)}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}f(-x) \end{aligned}$$

דוגמא

ראינו כי $e^{-|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, $f(x)$ רציפה וגם f' רציפה למקוטעין ולכן

$$\begin{aligned} e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}e^{i\omega x}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}[\cos\omega x + i\sin\omega x]\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\pi(1+\omega^2)}d\omega + i\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\pi(1+\omega^2)}d\omega}^{=0} \end{aligned}$$

החלק האחרון שווה ל־0 בגלל ש$e^{-|x|}$הינה ממשית וגם מכיוון שהיא אי־זוגית.

$$e^{-|x|}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\pi\left(1+\omega^{2}\right)}d\omega$$

מסקנה 12.3 אחד השימושים העיקריים שלנו בהתמרות פוריה ובהתמרות ההפוכות הוא חישוב אינטגרלים לא אמיתיים.

12.1 עיקרון הדואליות של התמרת פוריה, שימוש בדימיון בהגדרת ההתמרה וההתמרה ההפוכה

(ההבדלים הם: מקדם של $\frac{1}{2\pi}$ וסימן החזקה של האקספוננט הקומפסקי)

דוגמא

נחזור לדוגמא שראינו

$$\begin{aligned} e^{-|x|}\xrightarrow{\mathcal{F}}F\left(\omega\right) &= \frac{1}{\pi\left(1+\omega^{2}\right)}\\ e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^{2}\right)}e^{i\omega x}d\omega \end{aligned}$$

נציב $(-x)$ במקום x

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^{2}\right)}e^{-i\omega x}d\omega$$

נחליף את התפקידים של x,ω:

$$\pi e^{-|\omega|}=\frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+x^{2}\right)}e^{-ix\omega}dx$$

קיבלנו כי

$$\pi e^{-|\omega|}=2\pi\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^{1}}\right]\left(\omega\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^{2}}\right]\left(\omega\right)=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}}$$

דוגמא נוספת

ברצאה קודמת ראינו כי

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 & ,-b \leq x \leq b \\ 0 & ,\text{else} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin \omega b}{\omega \pi} \\ f(x) &= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega b}{\omega \pi} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega} d\omega \\ &= \begin{cases} 1 & ,|x| < b \\ \frac{1}{2} & ,|x| = b \\ 0 & ,|x| > b \end{cases} \end{aligned}$$

בהתאם לבחירת x, נקבל תוצאה שונה של אינטגרל לא אמיתי.

מקרה א': אם נבחר $x = 0$ נקבל כי

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega b}{\omega} d\omega &= 1 \\ \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega b}{\omega} d\omega &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

12.2 נוסחת פלנשראל

משפט 12.4 נוסחת פלנשראל (Plancherel)

אם $f \in G(\mathbb{R})$ ו־$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ אז

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 d\omega < \infty$$

ומתקיים

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 d\omega$$

משפט 12.5 נוסחת פלנשראל המוכללת

אם $f, g \in G(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$$

אז

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)| \overline{|\mathcal{F}[g](\omega)|} d\omega$$

דוגמא

$$e^{-|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$$

לפי פלנשראל

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-|x|}\right)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}\right]^2 d\omega \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}dx &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2\pi} \\
&\Rightarrow \int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)}\right]^2 d\omega = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

12.3 קונבולוציה

הגדרה 12.6 פעולה בין שתי פונקציות $f(x), g(x)$ המסומנת ב־$(f*g)(x)$ ומגדרת באופן הבא:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

פעולת הקונבולוציה הינה קומוטטיבית כלומר $f*g = g*f$, הינה אסוציאטיבית כלומר $(f*g)*h = f*(g*h)$ וגם דיסטריביטיבית כלומר $f*(g+h) = f*g + f*g$.

טענה 12.7 אם f, g אינטגרביליות בהחלט, אז גם הקונבולוציה הינה אינטגרבילית בהחלט.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|f*g|\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy\right|dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|\,|g(y)|\,dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(\underbrace{x-y}_{=z,dz=dx}\right)\right|dx\right]|g(y)|\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|f(z)\,dz|\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\,dy < \infty
\end{aligned}$$

■

משפט 12.8 משפט הקונבולוציה
לכל $f, g \in G(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}[f*g](\omega) = 2\pi\mathcal{F}[f](\omega)\,\mathcal{F}[g](\omega)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)\,e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,g(y)\,dy\right)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,g(y)\,e^{-i\omega x+i\omega y-i\omega y}dydx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,e^{-i\omega(x-y)}g(y)\,e^{-i\omega y}dydx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,e^{-\omega(x-y)}dx}_{\mathcal{F}[f](\omega)}\underbrace{\frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\,e^{-i\omega y}dy}_{2\pi\mathcal{F}[g](\omega)} \\
&= 2\pi\mathcal{F}[f](\omega)\,\mathcal{F}[g](\omega)
\end{aligned}$$

■

12.4 שימוש למשוואות דיפרנציאליות חלקיות

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \begin{cases}-\infty<x<\infty \\ 0<t<\infty\end{cases}$$

$u(x,t)$ - טמפרטורה בנק' x בזמן t. תנאי התחלה נתון באופן הבא: $u(x,0)=f(x)\,,f\in G(\mathbb{R})$.

לפי העיקרון של התמרת פוריה, במקום לחשב את $u(x,t)$, נחשב את ההתמרה U של הפתרון ונמצא את ההתמרה ההפוכה שלו.

נגדיר את ההתמרה של פונ' הפתרון ביחס ל־x:

$$U(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{-i\omega x}dx$$

הפתרון לפי t:

$$\begin{aligned}
U_t(\omega,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)\,e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)\,e^{-i\omega x}dx \\
&= [\mathcal{F}[f'](\omega)=i\omega\mathcal{F}[f](\omega)] \\
&= k\mathcal{F}[u_{xx}](\omega,t) \\
&= -k\omega^2U(\omega,t)
\end{aligned}$$

קיבלנו מד"ר

$$\begin{aligned}
U_t(\omega,t) &= -k\omega^2U(\omega,t) \\
\lambda+k\omega^2 &= 0 \\
\lambda &= -k\omega^2 \\
\Rightarrow U(\omega,t) &= A(\omega)\underbrace{e^{-k\omega^2t}}_{G(\omega,t)}
\end{aligned}$$

בשלב זה נשתמש בתנאי התחלה

$$\begin{aligned} A(\omega) &= U(\omega,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx \\ &= F(\omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(\omega) = F(\omega)$$

וידוע ש-$f(x)$ מותמרת ל-$F(\omega)$. נבדוק איזו פונקציה מותמרת ל-$e^{-k\omega^2 t}$. ע"י לפשט את החישוב, נתשמש באחת התוצאות שראינו:

$$e^{-x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

ע"פ תכונת ההזזה

$$ce^{-(ax)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{c}{2\sqrt{\pi}\,|a|}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \stackrel{?}{=} e^{-k\omega^2 t}$$

נבצע השוואת מקדמים מתאימים ונמצא את a, c.

1. נשווה את החזקות:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{4a^2} &= -k\omega^2 t \\ ra^2 &= \frac{1}{kt} \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2\sqrt{kt}} \end{aligned}$$

2. נשווה את המקדמים:

$$\begin{aligned} \frac{c}{2\sqrt{\pi}\,|a|} &= 1 \\ \Rightarrow c &= 2\sqrt{\pi}\frac{1}{2\sqrt{kt}} = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} \end{aligned}$$

לסיכום:

$$g(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-k\omega^2 t} = G(\omega,t)$$

כלומר מצאנו ש:

$$\begin{aligned} U(\omega,t) &= F(\omega)\, G(\omega,t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f*g](\omega) \end{aligned}$$

כאשר f,g ידועות.

$$\begin{aligned}\Rightarrow u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}(f*g)(x,t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y,t)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy\end{aligned}$$

לסיכום

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy}$$

תרגיל

מצא פתרון ל־

$$\begin{cases}u_t=4u_{xx}\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & ,|x|\le 2\\ 0 & ,else\end{cases}$

פתרון

לאחר ההצגה של התמרת הפתרון כמכפלה של שתי התמרות $U(\omega,t)=F(\omega)\underbrace{e^{-4\omega^2t}}_{G(\omega,t)}$.

נשאר לחשב את $g(x,t)$ המותמרת ל$G(\omega,t)$.
תזכורת:

$$ce^{-(ax)^2}\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{c}{|a|}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}=e^{-k\omega^2t}$$

לאחר השוואת המקדמים והשוואת החזקות נקבל כי

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{4\sqrt{t}}\\ c &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{x^2}{16t}}\rightarrow\underbrace{e^{-4\omega^2t}}_{=G(\omega,t)}$$

ולכן לפי משפט הקונבולוציה

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}(f*g)(x,t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{-(x-y)^2}{16t}}dy\end{aligned}$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-2}^{2}e^{-\frac{(x-y)^2}{16t}}dy}$$

13 התמרת לפלס

הגדרה 13.1 תהי f פונ' רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$ המקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$, לכל מספר ממשי s נגדיר את התמרת לפלס באופן הבא:

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

דוגמא

$f(t)=1$ לכל $t\geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-st}1dt\\ &= \lim_{L\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^L\\ &= \frac{1}{s},\ s>0\end{aligned}$$

דוגמא נוספת:

$$a\in\mathbb{R},\ f(t)=e^{at}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a},\quad \begin{matrix}s-a>0\\ s>a\end{matrix}$$

טענה 13.2 תכונת הליניאריות של התמרת לפלס

$$\mathcal{L}[af+bg](s)=aL\mathcal{L}[f](s)+bL\mathcal{L}[g](s)$$

עוד דוגמא:

$$a\in\mathbb{R},\ f(t)=\sin at$$

נציג את $f(t)$ לפי אוילר

$$\begin{aligned}
\sin at &= \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\\
\mathcal{L}\left[\sin at\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right](s)\\
&= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{iat}\right](s)-\frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[-e^{-iat}\right](s)\\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right]=\frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

הערה 13.3 כמו במקרה של התמרת פוריה הפוכה גם כאן קיימת התמרה הפוכה וגם כאן מתקיים:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[aF+bG\right](t)=a\mathcal{L}^{-1}\left[F\right](t)+b\mathcal{L}^{-1}\left[G\right](t)$$

עוד דוגמא:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[te^{at}\right](s) &= \int_0^\infty te^{at}e^{-st}dt\\
&= \int_0^\infty te^{-(s-a)t}dt\\
&= \left.\frac{te^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^\infty+\frac{1}{s-a}\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt\\
&= \frac{1}{s-a}\left[\left.\frac{1}{-(s-a)}e^{-(s-a)t}\right|_0^\infty\right]\\
&= \frac{1}{(s-a)^2}
\end{aligned}$$

מסקנה:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right](t)=te^{at}$$

חלק X

הרצאה 10

הגדרה 13.4 לשם פשטות, נגדיר מרחב פונקציות $\Lambda(\mathbb{R})$ המקיימות:

1. הפונקציה הינה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$ המקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$.
2. לכל $\int_0^M |f(t)|\,dt<\infty$ לכל $0<M<\infty$.
3. קיים $k>0$ ו־$a\in\mathbb{R}$ כך ש־ $|f(t)|<ke^{at}$ לכל $t\geq 0$.

משפט 13.5 תהי $f \in \Lambda(\mathbb{R})$ אז

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}[f](s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \\
&\le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \\
&\le k\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt \\
&= \frac{k}{s-a} \xrightarrow{s\to\infty} 0
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

דוגמא

ראינו אתמול $\mathcal{L}[\sin\omega t](s)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos\omega t](s) + i\mathcal{L}[\sin\omega t](s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}dt \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{(i\omega-s)t} \\
&= \lim_{A\to\infty}\frac{e^{(i\omega-s)A}-1}{i\omega-s} \\
&= \begin{cases} \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} & ,s>0 \\ \infty & ,s\le 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

נפריד את לחלק מדומה ולחלק ממשי ונקבל כי

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin\omega t](s) &= \frac{\omega}{s^2+w^2},\ s>0 \\
\mathcal{L}[\cos\omega t](s) &= \frac{s}{s^2+w^2},\ s>0
\end{aligned}$$

הערה 13.6 באופן דומה ניתן לפתח התמרה עבור $\cosh t, \sinh t$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sinh at](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right](s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[\frac{e^{at}}{2}\right](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[\frac{e^{-at}}{2}\right](s) \\
&= \frac{a}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

תכונות

אם $\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(s\right)=F\left(s\right)$ אז

$$\mathcal{L}\left[-tf\left(t\right)\right]\left(s\right)=\frac{d}{ds}F\left(s\right)$$

הסבר

$$\begin{aligned}F\left(s\right) &= \int_{0}^{\infty}e^{-st}f\left(t\right)dt\\ \frac{d}{ds}F\left(s\right) &= \frac{d}{ds}\int_{0}^{\infty}e^{-st}f\left(t\right)dt\\ &= \int_{0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}\right)f\left(t\right)dt\\ &= \int_{0}^{\infty}-te^{-st}f\left(t\right)dt\\ &= \mathcal{L}\left[-tf\left(t\right)\right]\left(s\right)\end{aligned}$$

דוגמא

ראינו ש $\mathcal{L}\left[e^{t}\right]\left(s\right)=\frac{1}{s-1}$

$$\Rightarrow\mathcal{L}\left[te^{t}\right]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{\left(s-1\right)^{2}}$$

עוד תכונות

אם ההתמרה של f ידועה אז

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{at}f\left(t\right)\right]\left(s\right) &= \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(s-a\right)\\ \mathcal{L}\left[f\left(at\right)\right]\left(s\right) &= \frac{1}{a}\mathcal{L}\left[f\right]\left(\frac{s}{a}\right),\ a>0\\ \mathcal{L}\left[t^{n}f\left(t\right)\right] &= \left(-1\right)^{n}\frac{d^{n}}{ds^{n}}F\left(s\right)\end{aligned}$$

דוגמא

נחשב התמרת לפלס של $f\left(t\right)=t^{n}$, $n\in\mathbb{Z}_{+}\left(=\mathbb{N}\cup\left\{0\right\}\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^{n}\right]\left(s\right) &= \mathcal{L}\left[t^{n}1\right]\left(s\right)\\ & \left[\mathcal{L}\left[1\right]\left(s\right)=\frac{1}{s}\right]\\ &= \left(-1\right)^{n}\frac{d^{n}}{ds^{n}}\left(\frac{1}{s}\right)\\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

13.1 התמרת לפלס הפוכה

קיים משפט המגדיר התמרה הפוכה, אך הדרך המועדפת לחישוב התמרה הפוכה היא באמצעות התוצאות הידועות של ההתמרות.

דוגמא

נחשב התמרה הפוכה של $\mathcal{L}(s)=\frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}$

המטרה כאן היא לפרק את הביטוי לשברים חלקיים ולהשתמש בהתמרה הפוכה של כל שבר חלקי בהתאם לתכונת הליניאריות.

$$\frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$A=\frac{1}{16},\ B=\frac{1}{8},\ C=-\frac{1}{16},\ D=0$$

$$\frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}=\frac{\frac{1}{16}}{s+2}+\frac{\frac{1}{8}}{(s+2)^2}+\frac{-\frac{1}{16}}{s^2+4}$$

כעת נשתמש בתוצאות הבאות

$$\begin{aligned} e^{at} &\rightarrow \frac{1}{s-a} \\ te^{at} &\rightarrow \frac{1}{(s-a)^2} \\ \cos at &\rightarrow \frac{s}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

ולכן

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}\right](t) = \frac{1}{16}e^{-2t}+\frac{1}{8}te^{-2t}-\frac{1}{16}\cos 2t$$

13.2 התמרת לפלס של נגזרת

משפט 13.7 אם $f\in\Lambda(\mathbb{R})$ ו־f' רציפה למקוטעין אז התמרת לפלס של f' מוגדרת לכל $s>a$(אותו aמההגדרה של $\Lambda(\mathbb{R})$) ומתקיים:

$\mathcal{L}[f'](s)=s\mathcal{L}[f]-f(0)$

באופן כללית אם $f,f',\cdots,f^{(n-1)}\in\Lambda(\mathbb{R})$ ו־$f^{(n)}$רציפה למקוטעין, אז

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s)=s^n\mathcal{L}[f](s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-s^0f^{(n-1)}(0)$$

שימוש במשפט זה מאפשר פתרון של מד"ר

לדוגמה:

$$\begin{cases} y''-y'-6y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

נתמיר את המשוואה:

$$\mathcal{L}[y''-y'-6y]=\mathcal{L}\left[y''\right]-\mathcal{L}\left[y'\right]-6\mathcal{L}\left[y\right]=0$$
$$s^2\mathcal{L}\left[y\right]-s\cdot y(0)-y'-(s\mathcal{L}\left[y\right]-y(0))-6\mathcal{L}\left[y\right]=0$$
$$(s^2-s-6)\mathcal{L}\left[y\right]=s-2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{s-2}{s^2-s-6} \\ &= \frac{s-2}{s^2-s-6} \\ &= \frac{s-2}{(s-3)(s+2)} \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{s-3}+\frac{\frac{4}{5}}{s+2} \end{aligned}$$

נחשב התמרה הפוכה $\left(e^{at}\to\frac{1}{s-a}\right)$

$$y\left(t\right)=\frac{1}{5}e^{st}+\frac{4}{5}e^{-2t}$$

דוגמא נוספת

$$\begin{cases} y''-2y'+y=0 \\ y\left(0\right)=1 \\ y'\left(0\right)=-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[y''\right]-2\mathcal{L}\left[y'\right]+\mathcal{L}\left[y\right] &= 0 \\ \left(s^2-2s+1\right)\mathcal{L}\left[y\right]-s+4 &= 0 \\ \mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{s-4}{s^2-2s+1} \\ &= \frac{s-4}{\left(s-1\right)^2} \\ &= \frac{1}{s-1}-\frac{3}{\left(s-1\right)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y\left(t\right)=e^t-3te^t$$

דוגמא

$$\begin{cases} y''+2y'+5y=0 \\ y\left(0\right)=1 \\ y'\left(0\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y''+2y'+5y\right] &= 0\\ \Rightarrow \mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{s+2}{s^2+2s+5}\end{aligned}$$

דרך א:

$$\begin{aligned}s^2+2s+5 &= \left(s+1\right)^2+2^2\\ \Rightarrow \frac{s+2}{\left(s+1\right)^2+2^2} &= \frac{s+1}{\left(s+1\right)^2+2^2}+\frac{2\frac{1}{2}}{\left(s+1\right)^2+2^2}\end{aligned}$$

ראינו כי

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s) &= \frac{b}{\left(s-a\right)^2+b^2}\\ \mathcal{L}\left[e^{at}\cos bt\right](s) &= \frac{s-a}{\left(s-a\right)^2+b^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y\left(t\right)=e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

דרך ב': פירוק בעזרת מרוכבים

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{s+2}{s^2+2s+5} &= \frac{\frac{1}{2}-\frac{i}{4}}{s+1-2i}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{i}{4}}{s+1+2i}\\ \Rightarrow y\left(t\right) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{4}\right)e^{-(1-2i)t}+\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\right)e^{-(1+2i)t}\\ &= e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\end{aligned}$$

13.3 קונבולוציה

לכל $f,g\in\Lambda\left(\mathbb{R}\right)$

$$\left(f*g\right)\left(t\right)=\int_0^t f\left(t-y\right)g\left(y\right)dy$$

משפט 13.8 משפט הקונבולוציה
לכל $f,g\in\Lambda\left(\mathbb{R}\right)$

$$\mathcal{L}\left[f*g\right](s)=\mathcal{L}\left[f\right](s)\,\mathcal{L}\left[g\right](s)\,,\ s>a$$

הערה 13.9 משפט הקונבולוציה הינו שימושי עבור משוואות אינטגרליות.

דוגמא

$$\varphi(t)=\int_0^t f(y)\,dy$$

נבטא את $\mathcal{L}[\varphi](s)$ באמצעות $\mathcal{L}[f](s)$.
ניתן לומר כי $\varphi=f*g$ עבור $g(t)=1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\varphi](ss) &= \mathcal{L}[f*g](s)\\ &= \mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}[g](s)\\ &= \mathcal{L}[f](s)\,\frac{1}{s}\\ \Rightarrow \mathcal{L}[\varphi](s) &= \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}\end{aligned}$$

דוגמא

נמצא פונ' $f(t)$ המקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_0^t f(t-u)\,f(u)\,du=te^{at},\ t\geq 0$$

נחשב את שני האגפים

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}[f](s) &= \frac{1}{(s-a)^2}\\ \mathcal{L}[f](s) &= \pm\frac{1}{s-a}\\ f(t) &= \pm e^{at}\end{aligned}$$

דוגמא פיזיקלית

$$\begin{aligned}\sigma &= E\epsilon\\ \sigma(t) &= \int_0^t E(t-s)\,\frac{d\epsilon}{ds}ds\\ \mathcal{L}[\sigma](s) &= \mathcal{L}[E](s)\,s\mathcal{L}[\epsilon](s)\\ \mathcal{L}[E] &= \frac{\mathcal{L}[\sigma]}{s\mathcal{L}[\epsilon]}\\ E(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[\sigma]}{s\mathcal{L}[\epsilon]}\right]\end{aligned}$$

13.4 פונקציות מדרגה

$$H_c(t)=\begin{cases}0 & ,0<t<c\\ 1 & ,t\geq c\end{cases}$$

לפי ההגדרה של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[H_c(t)\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)\,dt\\ &= \int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-cs}}{s},\ s>0\end{aligned}$$

ניתן להשתמש ב־$H_c(t)$ לצורך הגדרת פונקציות נוספות, לדוגמא:

$$g(t)=\begin{cases}0 & ,0\leq t<c\\ f(t-c) & ,t\geq 0\end{cases}$$

ולכן ניתן לומר כי:

$$g(t)=H_c(t)\,f(t-c)$$

בהתאם לכך ניתן לחשב את $\mathcal{L}[g](s)$.
אם $\mathcal{L}[f]=F(ss)$, אז

$$\mathcal{L}\left[H_c(t)\,f(t-c)\right](s)=e^{-cs}F(s)$$

הסבר

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[H_c(t)\,f(t-c)\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)\,f(t-c)\,dt\\ &= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt\\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+c)}f(u)\,du\\ &= e^{-sc}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\\ &= e^{-sc}\mathcal{L}[f](s)\end{aligned}$$

ניתן לתאר פונקציות באמצעות צירוף ליניארי של פונקציות מדרגה

$$f(t)=\begin{cases}t & ,0\leq t<1\\ 0 & ,t\geq 0\end{cases}=t\left[H_0(t)-H_1(t)\right]$$

דוגמא

נמצא פונ' שהתמרת לפלס שלה היא $\frac{e^{-s}}{s^2}$, ידוע ש־$\frac{1}{s^2}$ $t \to$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[H_1(t)(t-1)\right](s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$$

דוגמא

נתון כי $\mathcal{L}[g] = \frac{e^{-3s}}{s^2-2s-3}$, מהי g?
נפרק את הביטוי לשברים חלקיים

$$\frac{1}{s^2-2s-3} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{(s-1)^2-2^2} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}e^t \sinh 2t\right]$$

כעת נתייחס לחזקה ונרשום את הביטוי המלא (כולל הזזה) $(c=3)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}H_3(t)\,e^{t-3}\sinh 2(t-3)\right] = \mathcal{L}[g]$$

תרגיל

מצא פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y''-3y'+2y = f(t) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ,0 \le t < 1 \\ 0 & ,1 \le t < 2 \\ 1 & ,2 \le t < 3 \\ 0 & ,3 \le t < 4 \\ 1 & ,4 \le t < 5 \\ 0 & ,5 \le t < \infty \end{cases}$$

פתרון

נציג את $f(t)$ באמצעות פונ' מדרגה

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[H_0(t)-H_1(t)\right]+\left[H_2(t)-H_3(t)\right]+\left[H_4(t)-H_5(t)\right] \\ \Rightarrow \mathcal{L}[y] &= \frac{\mathcal{L}[\mathcal{F}]}{s^2-3s+2} = \frac{\mathcal{L}[f]}{(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+e^{-4s}-e^{-5s}}{s(s-1)(s-2)} \\ \frac{1}{s(s-1)(s-2)} &= \frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{-1}{s-1}+\frac{\frac{1}{2}}{s-2} \end{aligned}$$

כעת נשתמש בתכונה $\mathcal{L}\left[H_c(t)\,f(t-c)\right](s)=e^{-cs}F(s)$ ולכן הפתרון של המד"ר הינו

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}-e^{t}+\frac{1}{2}e^{2t}\right)-H_1\left(\frac{1}{2}-e^{(t-1)}+\frac{1}{2}e^{2(t-1)}\right)+\ldots-H_5\left(\frac{1}{2}-e^{(t-5)}+\frac{1}{2}e^{2(t-5)}\right)$$

חלק XI

הרצאה 14

14 DFT - התמרת פורייה הבדידה

[דמיינו שרטוט]. דוגמים ערכים $\{x_1,\ldots x_n\}$ ומקבלים ערכים של פונקציה רציפה $\{f(x_1),\ldots f(x_n)\}$.
התמרת פורייה הבדידה מוגדרת עבור סידרה של ערכים (ממשיים או מרוכבים).

הגדרה 14.1 בהנתן סידרה של N נקודות (נסמנה $\chi=\{x_0,\ldots,x_n\}$) נגדיר N נקודות של התמרת פורייה באופן הבא:

$$X(\chi)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}x_j\exp\left(-2\pi ij\frac{k}{N}\right)\qquad(k=0,\ldots N-1)$$

כלומר תוצאת ההתמרה היא סידרה של N ערכים בפלט $X=(X_0,\ldots X_{N-1})$.

דוגמה

נחשב DFT של $\chi=\{0,1,1,-1\}$

$$X_0=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x_j\exp(-2\pi ij\frac{0}{4})=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x_j\cdot 1=\frac{1}{2}(0+1+1-1)=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}X_0&=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x_j\exp\left(-2\pi ij\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x_j\exp\left(^{-\pi ij}/_2\right)=\frac{1}{2}\left(0+\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)+\exp(-i\pi)-\exp\left(-i\frac{3}{2}\pi\right)\right)\\&=\frac{1}{2}(-i-1-i)=-\frac{1}{2}-i\end{aligned}$$

ובאופן דומה,

$$\begin{aligned}X_2&=\frac{1}{2}\\X_3&=-\frac{1}{2}+i\end{aligned}$$

14.1 הגדרה של $IDFT$ (התמרת פוריה בדידה הפוכה)

$$x_k=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{n-1}X_je^{2\pi ij\frac{k}{N}},\qquad k=0,1,\ldots N-1$$

כמו במקרה הרציף, גם במקרה הבדיד, התמרת פוריה מקיימת את תכונת הליניאריות

$$\mathcal{F}_N(ax+by) = a\mathcal{F}_N(x) + b\mathcal{F}_N(y)$$

תכונה שימושית נוספת הקשורה למחזוריות:

$$X(k) = X(k+N)$$

הסבר: $e^{2\pi ij\frac{k}{N}} = e^{2\pi ij\frac{k}{N}}e^{2\pi ij} = e^{2\pi ij\frac{k+N}{N}}$.

14.2 הגדרה באמצעות מטריצת DFT

ניתן לעדכן את ההגדרה של DFT כמכפלה של מטריצה בוקטור הקלט

$$X = Wx$$

כאשר

$$\begin{aligned} \text{Vandermonde} \qquad W_{jk} &= \left(\frac{\omega^{jk}}{\sqrt{N}}\right) \\ \omega &= e^{-\frac{2\pi i}{N}} \end{aligned}$$

כלומר

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots\cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \omega^4 & \omega^6\cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots\cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

14.2.1 מקרה פרטי

$N=2$

$$\begin{aligned} \omega &= e^{-\frac{2\pi i}{2}} = e^{-\pi i} = -1 \\ W &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$N=4$

$$\begin{aligned} \omega &= e^{-\frac{2\pi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i \\ W &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$N=8$

$$\begin{aligned} \omega &= e^{-\frac{2\pi i}{8}} = e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ W &= \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} \omega^0 & \cdots & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega & \cdots & \omega^7 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^7 & \cdots & \omega^{49} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

אם נחזור לדוגמא המספרית $x = \{0, 1, 1, -1\}$

$$= X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - i \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + i \end{bmatrix}$$

הערה 14.2 ב־Matlab קיימת פונקציה לבניית מטריצת DFT, dftmatrix.

אם ניתן להציג את ההתמרה כ

$$X = Wx$$

אז

$$W^{-1}X = x$$

מייצג את ההתמרה ההפוכה. במקרה זה מתקיימת התכונה Hermitian Transpose

$$W^H W = WW^H = NI$$

$$\left(A^H = \overline{(A^t)}\right)$$

15 $FFT - Fast\ Fourier\ Transform$

הערה 15.1 לא מדובר בהעתקה הידועה מסרט האקשן מהיר ועצבני (להלן Fast & Furious Transform - FFT)

אלגוריתם מהיר יותר לחישוב התמרת פוריה בדידה (במקום סיבוביות של $O\left(N^2\right)$, הסיבוכיות הינה $O\left(N \log N\right)$ כאשר $N = 2^k$)

נדגים את תהליך הניסוח של FFT עבור $N = 4$.

$$\begin{aligned} X_p &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{np} \\ \omega_N &= e^{-\frac{2\pi i}{N}} \end{aligned}$$

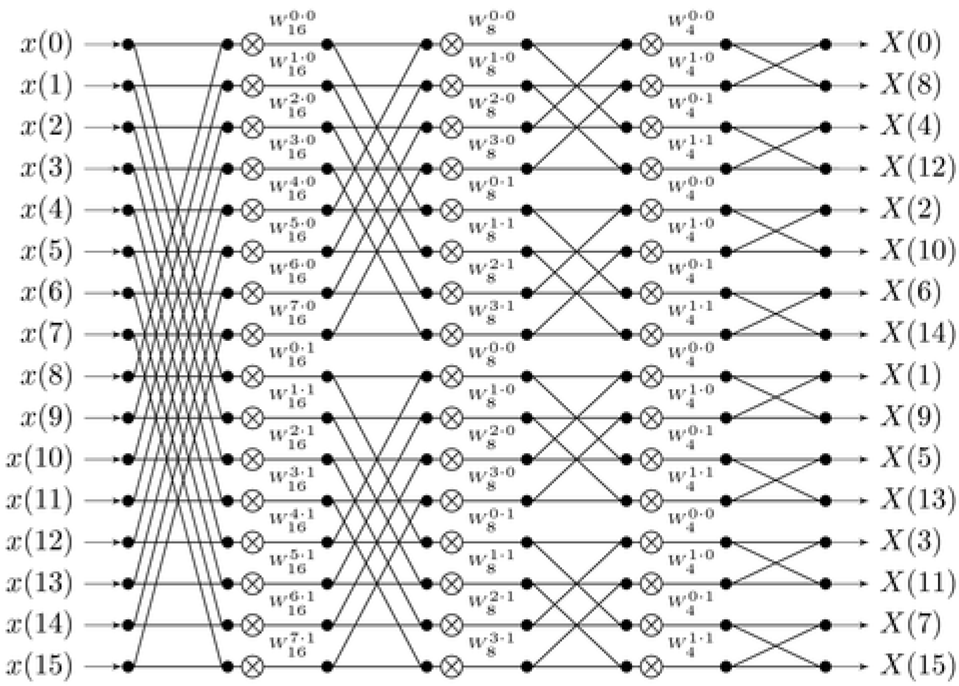
$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 0\cdot 0} + x_1 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 1\cdot 0} + x_2 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 2\cdot 0} + x_3 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 3\cdot 0} \\ X_1 &= x_0 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 0\cdot 1} + x_1 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 1\cdot 1} + x_2 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 2\cdot 1} + x_3 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 3\cdot 1} \\ X_2 &= \cdots\cdots \\ X_3 &= x_0 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 0\cdot 3} + x_1 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 1\cdot 3} + x_2 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 2\cdot 3} + x_3 e^{-\frac{2\pi i}{4}\cdot 3\cdot 3} \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} X_0 &= \left(x_0 + e^{-\frac{2\pi i 0}{2}} x_2\right) + e^{-\frac{2\pi i 0}{4}}\left(x_1 + e^{-\frac{2\pi i 0}{2}} x_3\right) \\ X_1 &= \left(x_0 - e^{-\frac{2\pi i 0}{2}} x_2\right) + e^{-\frac{2\pi i 1}{4}}\left(x_1 - e^{-\frac{2\pi i 0}{2}} x_3\right) \\ X_2 &= \left(x_0 + e^{-\frac{2\pi i 0}{2}} x_2\right) - e^{-\frac{2\pi i 0}{4}}\left(x_1 + e^{-\frac{2\pi i 0}{2}} x_3\right) \\ X_3 &= \left(x_0 - e^{-\frac{2\pi i}{2}} x_2\right) - e^{-\frac{2\pi i 1}{4}}\left(x_1 - e^{-\frac{2\pi i 0}{2}} x_3\right) \end{aligned}$$

אם נסמן $W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ אז

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \left(x_0 + W_2^0 x_2\right) + W_4^0\left(x_1 + W_2^0 x_3\right) \\
X_1 &= \left(x_0 - W_2^0 x_2\right) + W_4^1\left(x_1 - W_2^0 x_3\right) \\
X_2 &= \left(x_0 + W_2^0 x_2\right) - W_4^0\left(x_1 + W_2^0 x_3\right) \\
X_3 &= \left(x_0 - W_2^0 x_2\right) - W_4^1\left(x_1 - W_2^0 x_3\right)
\end{aligned}
$$



15.1 חלוקת הקלט לזוגיים ואי־זוגיים

דרך א'

$$
\begin{array}{c}
x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{array}\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x_0 \\ x_4 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x_2 \\ x_6 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x_1 \\ x_5 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x_3 \\ x_7 \end{array}\right.
\end{array}
$$

דרך ב':

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 1 & 0 & 1 \\
6 & 1 & 1 & 0 \\
7 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|}
\hline
0 \\ 4 \\
\hline
2 \\ 6 \\
\hline
1 \\ 5 \\
\hline
3 \\ 7 \\
\hline
\end{array}
$$