

14.4.13

הרצאה 2

נושא: הקריות:

הרצאה גלילי, גבולות, מרחק טרנס.

תוצאות, כלל. המקבילית, נוסחאות פטריסליה

הגדרה: יהי $\mathcal{V}$ ו- $\mathcal{W}$ קבוצות וקטוריות, $f(x, y)$ פונקציה

I) $f(x, y) \geq 0$

II) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

III) $f(x, y) = f(y, x)$

IV) $f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{V}$

צגתאם f מרחק נורמלי, נגזיר את הנורמה כמטריקה

$$f(x, y) = \|x - y\|$$

קל לראות כי הצביעות מהמטריקה מתקיימות

1) $\|x - y\| \geq 0$

2) $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $\|x - y\| = \|y - x\|$

4) $\|x - z\| + \|z - y\| \geq \|x - y\|$

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$$

כאן-כן, מקור הקרה כרטי

$$f(x, 0) = \|x\|$$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in T$$

צגתאם f נורמה נוסחאות

א-צורה נוסחאות

ד-מרחק טרנס (יוצר קווארט)

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_j \in T$$

נגזיר את הקרה

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \right)$$

$$\frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \leq 1$$

ברור כי הסדר מתכנס כי

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

אך יש לבדוק כי ההטלהים שהולצת אכן תקימות את ההערכות:

1) $f(x, y) \geq 0$ קט' מרומת

2) $f(x, y) = 0 \Rightarrow |a_k - b_k| = 0 \Rightarrow x = y$

3) $f(x, y) = f(y, x) \Rightarrow |a_k - b_k| = |b_k - a_k|$

4) נבדוק את א' - טיפון הממסלם עבור ההטלה שיהיה

(*) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ צ"ע מוכיח

$x = \{a_k\}, y = \{b_k\}, z = \{c_k\}$

$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \leq \frac{|a_k - c_k|}{1 + |a_k - c_k|} + \frac{|c_k - b_k|}{1 + |c_k - b_k|}$$

$|a_k - b_k| = |(a_k - c_k) + (c_k - b_k)|$

ולכן, אם נוכיח את (*) אזי נוכח את א' - טיפון

הממסלם עבור ההטלה של טיפון.

נבדוק כונקציה $\phi(t) \triangleq \frac{t}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$

$\phi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$

הנחיות תהיה חיובית, כלומר $\phi(t)$ כונקציה עולה.

$|a+b| \leq |a| + |b|$

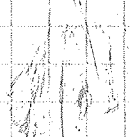
נציב ב- $\phi(t)$ את הביטויים למעלה, ונקבל

$\phi(|a+b|) \leq \phi(|a| + |b|)$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+(|a|+|b|)} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

מסקנת: המטריקה $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \right)$ של טיחונוב

מהווה מטריקה לפי הגדרה.



המסקנה: מטריקה שונה מנומרת.

$$\|x\| = \|x\|$$

סבור נכונה: יש צריכה טיחונוב

$$\forall \alpha \in F, x \in V$$

המטריקה של טיחונוב לא מקיימת את הצליטה הנ"ל של הנומרת.

הגדרה 1: יהי x שייך למרחב מטרי, אזי נגדיר את המרחב של הסדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ (כאשר } \varepsilon > 0 \text{) } \exists N > 0 \text{ (כאשר } N > 0 \text{) } \forall n > N, \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

הסדרה $\{x_n\}$ יציבה.

הוכחה: נניח כי קיימים 2 גבולות a, b .

$$\rho(a, b) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_n, b) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\rho(a, b) = 0$$

ולכן

המסקנה: אם קיים גבול, אזי האיברים בסדרה חסומים.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

הוכחה: אם קיים הגבול, צדדים

$$\rho(x_n, 0) \leq M$$

לפי המכונה כי

$$\rho(x_n, a) \leq \varepsilon$$

סבור n גדול, $n \geq N$,

כלומר, האיברים $a, \dots, n$ נמצאים בתוך הכדור $\rho(a, \cdot) \leq \varepsilon$

האיברים $1, \dots, n$ לא נמצאים בכדור.

וניקח את הערך המכסימלי של הקבוצה חסומה הנ"ל.

הגדרה 2: סדרה קוסי' תקרא אם מתקיים התנאי הבא עבור אצל הסדרה.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ (כאשר } N > 0 \text{) } \forall m, n > N, \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

סדרה המקיימת את קריטריון קוסי, אזי קיים גבול.

אם אין, אזי מהכרח, הגבול שייך למרחב.

אם הגבול שייך למרחב, אזי $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$ מהאחריות שלם.

בזמא: נתון הקבוצה המספרים הראציונליים

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$

$$a_n \in \mathbb{Q}, e \notin \mathbb{Q}$$

בזמא: לו געב' הסדרה a_n מק"מ'ת א"ת
קריטריון קוסי; א"ת המרחק אינו ט"ס
ט"ס הטו לא מכיל את הגבול של הסדרה a_n .

§ תרגילים מספר 4 - מרחבי נורמה, מטריקה.

ט"ס 1

$$V = C[1, 4] \quad \text{המרחב מוידר}$$

צ"ע"נ, מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[1, 4]$

$$x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t \quad \text{י"ט למצוא את הנורמה של (ט"א).}$$

נזכיר את הנורמה

$$\|f\|_C = \max_{1 \leq t \leq 4} |f(t)|$$

נבדוק כי נורמה זו אכן מק"מ'ת את אי-ט"ס המט"ס.

~~ט"ס~~

$$|f(t) + \phi(t)| \leq |f(t)| + |\phi(t)| \leq \max_{1 \leq t \leq 4} |f(t)| + \max_{1 \leq t \leq 4} |\phi(t)|$$

$$\max_{1 \leq t \leq 4} |f(t) + \phi(t)| \leq \max_{1 \leq t \leq 4} |f(t)| + \max_{1 \leq t \leq 4} |\phi(t)| \quad \forall t$$

א"ת מצדד בקטע סגור (a, b) א"ת נזכר א"ת $\{ \sup \text{ ו} \inf \}$ ~~ט"ס~~
נחזור למט"ס

$$\|x(t)\|_C = \max_{1 \leq t \leq 4} |2t^3 - 15t^2 + 36t|$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t=1) = 23 \\ x(t=4) = 32 \end{array} \right\} \text{הט"ס בקצוות}$$

$$x'(t) = 6t^2 - 30t + 36 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$x(t=2) = 28$$

$$x(t=3) = 27$$

הסתירה: הנכסיון מתקבל מקצתם נקודה הקדם

$$\max \{x(t)\} = x(t=4) = 32$$

$$V = L_1[0,1] \quad \text{המרחב מונזר} \quad (b)$$

$$\int_0^1 |\varphi(t)| dt < \infty \quad \text{אם } \varphi(t) \in L_1$$

$$\int_0^1 |\varphi(t)| dt \quad \text{אם הנורמה } \|\varphi(t)\|_{L_1} \quad \text{מונזר לפי}$$

ל מרחב הסתגלות המונטריות המונטריות המונטריות המונטריות

$$\int_0^1 |2t-1| dt = \int_0^{1/2} (1-2t) dt + \int_{1/2}^1 (2t-1) dt$$

$$= \left[t - t^2 \right]_0^{1/2} + \left[t^2 - t \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{8}$$

$$V = \mathbb{C}^2 \quad \text{המרחב מונזר} \quad (c)$$

$$\|\varphi \in \mathbb{C}^2\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \quad \varphi = (x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{C}$$

$$\|(1+2i, 2+3i)\| = \left[(1+2i)^2 + (2+3i)^2 \right]^{1/2} = [5 + 13]^{1/2} = \sqrt{18}$$

$$X_n = \left(\frac{5^n - 3^n}{7^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$V = \mathbb{Q}^2 \quad \text{המרחב מונזר} \quad (3)$$

גל הוא מרחב הסתגלות המונטריות, צה"ן

$$x_n = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2 \quad \text{if} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$$

$$\|x_n\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \right]^{1/2}$$

הנורמה מונזרת

$$\|x_n\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n - 3^n}{7^n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{25^n - 30^n + 9^n}{49^n} \right) \right]^{1/2}$$

$$\|x\| = \left[\sum \left(\frac{25}{49} \right)^n + \sum \left(\frac{9}{49} \right)^n + \sum \left(\frac{30}{49} \right)^n \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{25/49}{1 - 25/49} + \frac{9/49}{1 - 9/49} + \frac{30/49}{1 - 30/49} \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{25}{24} + \frac{9}{40} + \frac{30}{19} \right]^{1/2}$$

$$x(t) = \sin^2(t)$$

$$V = C[0, \pi]$$

רצף מוגבל (א)

$$\|x(t)\| = \max_{0 \leq t \leq \pi} \{x(t) = \sin^2(t)\} = 1$$

$$V = L^2[0, 1]$$

רצף מוגבל (א)

$$x(t) = e^t + 2\sin(t)$$

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty \text{ מתיק, כל } x \in L^2[a, b]$$

$$\|x\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} = \left[\int_0^1 (e^t + 2\sin(t))^2 dt \right]^{1/2}$$

$$= \left[\int_0^1 [e^{2t} + 4e^t \sin(t) + 4\sin^2(t)] dt \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{e^{2t}}{2} \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 e^t \sin(t) dt + 4 \int_0^1 \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \right]$$

$$\int_0^1 e^t \sin(t) dt \Rightarrow \begin{cases} u = e^t \\ v = \sin(t) \end{cases} \quad \begin{aligned} du &= e^t dt \\ dv &= \cos(t) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 e^t \sin(t) dt = -e^t \cos(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^t \cos(t) dt$$

$$2 \int_0^1 e^t \sin(t) dt = 1 - e \cos(1) - e \sin(1)$$

$$\int_0^1 e^t \sin(t) dt = \frac{1 - e \cos(1) - e \sin(1)}{2}$$

$$\|x\|^2 = \frac{e^2-1}{2} + 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin(2)}{2} \right] + \frac{1-e[\sin(1)-\cos(1)]}{2}$$

למה 2 ב יט למצוא את המרחק בין נקודות x, y במרחב האוקלידי V

$$x = (2+3i, 3+2i), y = (3i-1, 3i-1)$$

$$V = \mathbb{C}^2 \quad (1)$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}^{1/2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (i-4)^2}^{1/2} = \sqrt{26}$$

$$x(t) = 16t^3 + 48t$$

$$V = (20, 1] \quad (2)$$

$$y(t) = 60t^2 + 11$$

$$\rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \rho(t)$$

$$= \max_{0 \leq t \leq 1} |16t^3 + 48t - 60t^2 - 11|$$

$$|\rho(t=0)| = |-11| = 11$$

$$|\rho(t=1)| =$$

$$x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, \quad y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$V = \mathbb{R}^4 \quad (2)$$

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

מרחב הילברט - תרגילים

בסרמינטה של גרם - טאונס

אורתוגונליות עם המסק

הצגת מומנטים של פולנום עם המסק

המסק של תרגילים מספר 4

טאנר 2, מספר 2

יש למצוא את המרחק בין נקודות x ו- y במרחב מטרי V

$$V = \mathbb{R}^1, \quad x = \left(\frac{n^2}{2^n} \right)_{n=1}^{\infty}, \quad y = \left(\frac{n}{2^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$x \in \mathbb{R}^1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$$

$$y \in \mathbb{R}^1$$

כאן >

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} - \frac{n}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$$

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

אחר $|t| < 1$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = (1-t)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) t^{n-2}$$

$$s''(t=1/2) = \sum \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{1}{4} s''(t) \Big|_{t=1/2} = \frac{1}{4} \sum n(n-1) t^{n-2} \Big|_{t=1/2} = \frac{2}{(1-t)^3} \Big|_{t=1/2} = 4$$

אם 3 אינן המין הכותקיות הבאות הנזכרים מטריקה במרחב $\mathbb{R}^3$

אדם שצב המספרים הממשיים

$$p(m_1, m_2) = (a_1 - b_1)^3 + (a_2 - b_2)^3 + (a_3 - b_3)^3 \quad (1)$$

לפי מטריקה כי ניתן להקבל ערך ממילי

$$p(m_1, m_2) = [(a_1 - 2a_2)^2 + (b_1 - 3b_2)^2 + (c_1 - 4c_2)^2]^{1/2} \quad (b)$$

לכן ההכרח מאלריקה, יכול לנקות סדר שלם

$$p(m_1, m_2) = [a_1 - a_2]^{1/2} + [b_1 - b_2]^{1/2} + [c_1 - c_2]^{1/2} \quad (c)$$

נתבונן ה-3 נקודות

$$\begin{cases} m_1 = (0, 0, 0) \\ m_2 = (1, 1, 1) \\ m_3 = (1, 1, 0) \end{cases}$$

$$p(m_1, m_2) = 9$$

$$p(m_1, m_3) = 4$$

$$p(m_3, m_2) = 1$$

קראנו ג'מלש'  ; נלמד, הסוקר, הנוקס

איןנה מאלריקה שכן א'נה מקימת את א-זיון הממל

$$p(m_1, m_2) = |a_1 - a_2|$$

(3)

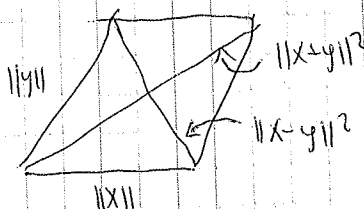
לנו מאלריקה.

הזכרה : מרחק הכסלה כנימא, שהנורה המוארת מהמכסלה הכנימא.

כמו-כן ניתן להגדיר את המכסלה הכנימא השורה הנורמה.

(גשו' המקלימא), והמרחק שלם. יקרא מרחק הספר.

מכסל כנימק שזון גואת תטו' המקלימא מתק"ס אפי' יג מכסלה כנימא.



$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

מרחק שלם : מרחק בו כל סדרת קו' מתכנסת תחת המאלריקה

(א'לנו ~~המאלריקה~~ היא הנורמה). והגדלם ט"ק

למרחק.

דוגמאות: L^2 הינו מרחב הילברט

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot \bar{g} \, dx$$

$$f \in L^2 \Rightarrow \int_a^b |f|^2 \, dx < \infty$$

הוכחה: כל מרחבי הילברט בעלי אותו מימד אינפיריטימי, ואינפיריטימיים.
 ס' לאו כל מרחב הילברט ספרותי.

משפט פיישר-ריס: אם נתונה סדרה $\{c_n\}$, נכ ט - $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$

אזי קיימת פונקציה $f(x)$ נכ ט - $\|f\| < \infty$

נכ טהסדרה c_n תהווה מקדמי פורייה של $f(x)$

$$c_n = \langle f(x), u_n(x) \rangle$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (\text{פריסבל})$$

$u_n(x)$ - מערכת אורתונורמלית.

המילים אחרות, המשפט פיישר-ריס אומר:

$$\forall x \in L^2 \exists f \in L^2 ; \forall f \in L^2 \exists x \in L^2$$

אינפיריטימי - כל אחד מהמרחב אחר, קיים איבר במרחב הנטו

אינפיריטימי - הנורמה של סוג האיברים טובה. (פריסבל)

3.1 תרגילים 4 - מרחב הילברט

אנחנו 1: הוכח שהם המרחב הילברט הסטנדרט טקולות. (מרחב ממ"ד, מרחב)

$$x \perp y$$

$$\|x+y\| = \|x-y\|$$

הוא סגור סגורים א', ב' טקולות?

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) = \frac{1}{2} (\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}) = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) = \frac{1}{2} (\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}) = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 0$$

ס' לאו כל מרחב הילברט ספרותי. ס' לאו כל מרחב הילברט ספרותי.

$$\|x + iy\| = \|x - iy\| \quad (c)$$

$$\S \quad \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Im}\{x, y\}$$

$$\|x - iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Im}\{\langle x, y \rangle\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\{ \langle x, y \rangle \} = 0$$

~~XXXXXXXXXX~~ 1180 1180

[illegible]

ט"ו ח' 23
היום אסתר שהגזיר הכסלה סניאח אחרתה נורא
כך מתחת יהיה אחרתה הימארה?
15P500

$$1 \leq p < \infty$$

סתר

$$\chi(t) \in L_p[0, T]$$

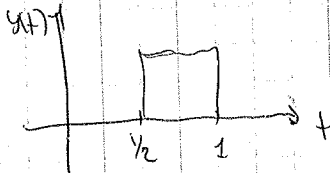
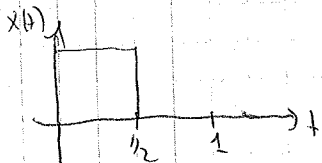
$$x(t) \in L_p \Rightarrow \int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$$

$$\|x(t)\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

השאלה האם מתק"ם תש"ו והתקבילת. (וכמוהו) תש"ו תעריף של (ק).
נב"א צומח צב"א

$$X(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$



$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \stackrel{?}{=} 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

הוא נתקיים,

$$\|x\| = \left(\int_0^{1/2} 1^p dt \right)^{1/p} = \left(t \Big|_0^{1/2} \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/p} = 2^{-1/p}$$

$$\|y\| = \left(\int_{1/2}^1 1^p dt \right)^{1/p} = \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/p} = 2^{-1/p}$$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = (2^{-1/p})^2 = 2^{-2/p}$$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2^{-2/p} + 2$$

$$\|x+y\| = \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{1/p} = 1$$

$$\|x-y\| = 1$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 1+1=2$$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\| + \|x-y\|$$

$$2^{-2/p+2} = 2^1$$

$$-\frac{2}{p} + 2 = 1$$

כלומר, נדרש

$$p = 2$$

מסקנה: רק עבור $p=2$ מתקיים תנאי הנורמליטה, ולכן רק עבור

$p=2$ המרחב הוא מרחב הילברט.

עבור $p \neq 2$ לא ניתן למסלול מכסלה כנימית. מטרת נורמה.

טענה 3: הוסיף איטור להגדיר הכסלה כנימית המרחב כנימית (חיסול)

כן שהמרחב יהיה מרחב הילברט.

כתיבון: הטענה הוסיף הנורמה עבור המרחב

$$x(t) + (t, \cos) \Rightarrow \|x(t)\| = \max_{0 \leq t \leq 1} x(t)$$

מק"לית וית תנאי הנורמליטה?

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{1}{2}t) \\ y(t) = \cos(\frac{1}{2}t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

נב"א צנצנאו נוצית

$$\|x(t)\| = \|y(t)\| = \max \{ \} = 1$$

$$\|x+y\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \{ x(t) + y(t) \} = \sqrt{2} \quad \text{ונקודת המצב של הזכית}$$

$$\|x-y\| = 1$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$(\sqrt{2})^2 + 1 = 2(1+1)$$

$$3 \neq 4$$

לא מתקיים תנאי הנורמליטה.

שאלה 4: האם המרחב $\{z_n(t) = \sin(2nt) + i\cos(2nt)\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת

היא בסיס אורתונורמלי

באורתונורמליות

שלמה

סתיון: המרחב כן אורתונורמלי ולכן אורתונורמליות.

כיון שאין השלמות, ביטול כי לא ניתן להגדיר כוונתה נוספת שלילתה

שאינה חלק מהמרחב, אשר אורתונורמליות למרחב.

נתבונן בכוונתה הקבועה 1 התחום $[0, \pi]$

$$\langle 1, \sin(2nt) \rangle = \int_0^\pi 1 \cdot \sin(2nt) dt = -\frac{1}{2n} \cos(2nt) \Big|_0^\pi = 0$$

$$\langle 1, \cos(2nt) \rangle = 0$$

מסקנה: המרחב איננו שלמה.

שאלה 5: האם הפונקציה הבאה נהנית מטריקת המרחב?

$$\varphi(x, y) = \arctg |x - y|$$

||

נבדוק קיום אי-שוויון המשולש

$$\arctg(\alpha + \beta) \stackrel{?}{\leq} \arctg(\alpha) + \arctg(\beta)$$

מסקנה

ננסה את הפונקציה

$$\varphi(\alpha, \beta) = \arctg(\alpha) + \arctg(\beta) - \arctg(\alpha + \beta)$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{1}{1+(\alpha+\beta)^2} \geq 0 \quad \varphi'_\alpha > 0$$

$$0 \leq \varphi(0, \beta) \leq \varphi(\alpha, \beta)$$

$$\varphi(x, y) = \arctg |x - y|$$

$$\varphi(x, y) \leq \varphi(x, z) + \varphi(z, y)$$

$$\alpha = |x - y|, \quad \beta = |y - z|$$

$$\alpha + \beta = |x - z| = |x - y| + |y - z|$$

נסמן